



UNIVERSITÄT REGENSBURG

Fakultät für Physik
Bachelor of Science Physik

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades eines Bachelor of Science (B.Sc.)

Biomechanische Untersuchungen beim Kugelstoßen

in der Theoretischen Physik.

von

Florian Rappl

(Matrikel-Nr. 1 363 009)

Gutachter: Prof. Dr. Alexander Lenz

Betreuer: Prof. Dr. Alexander Lenz

Einreichung: 01.06.2010

Erklärung

Eidesstattliche Erklärung zur Bachelorarbeit

Name: Rappl,
Vorname: Florian.

Ich versichere, die Bachelorarbeit selbständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben.

Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

Regensburg, den 01.06.2010.

.....

(Unterschrift)

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
2	Physik des Wurfes	9
2.1	Vorüberlegung ohne Abwurfhöhe	9
2.2	Der Wurf	12
2.2.1	Herleitung der Wurfweite mit Abwurfhöhe	12
2.2.2	Optimaler Abwurfwinkel beim Wurf mit Abwurfhöhe	14
2.2.3	Abhängigkeit der Wurfweite von der Abwurfhöhe	16
2.2.4	Zusammenhang Abwurfgeschwindigkeit und Abwurfwinkel	18
2.2.5	Zusammenhang Abwurfhöhe und Abwurfwinkel	21
2.2.6	Flugzeit der Kugel mit Abwurfhöhe	23
2.3	Auswirkungen der Luftreibung	24
2.3.1	Vorüberlegungen zur Luftreibung	24
2.3.2	Betrachtung des Wurfes mit Wind	26
2.3.3	Numerische Berechnung der Wurfweite	27
2.3.4	Verifikation der Ergebnisse	29
2.4	Konsequenzen der Betrachtung	30
3	Diskussion einiger Wurftechniken	33
3.1	Der Standstoß	34
3.1.1	Vorüberlegungen	34
3.1.2	Die Vorbereitungsphase	35
3.1.3	Die Hauptphase	36
3.1.4	Zusammenführen der Ergebnisse und Beispielrechnungen	38
3.2	Drehstoßtechnik	40
3.2.1	Vorüberlegungen	40
3.2.2	Die Vorbereitungsphase	42

3.2.3	Die Hauptphase	43
3.2.4	Ergebnisse und Beispielrechnungen	43
3.3	O'Brien-Technik	46
3.3.1	Vorüberlegungen	46
3.3.2	Der Keltische Wackelstein	47
3.3.3	Verwendung des Keltischen Wackelsteins	53
3.3.4	Ergebnisse und Beispielrechnungen	56
3.4	Konsequenzen der Betrachtung	58
4	Zusammenfassung	61
	Danksagungen	63
5	Anlagen	65
I	Numerische Berechnung des Wurfes	65
II	Parametereinstellungen zur Berechnung der O'Brien-Technik mit Hilfe des Keltischen Wackelsteins	75
	Tabellenverzeichnis	77
	Abbildungsverzeichnis	79
	Literaturverzeichnis	81

1 Einführung

Die Aufgabe der theoretischen Physik besteht darin, die Gesetzmäßigkeiten der Natur mathematisch zu formulieren. Der Arbeitsprozess startet dazu mit dem einfachsten Modell und fügt anschließend weitere Strukturen hinzu, um der realistischen Problemstellung immer näher zu kommen. Das Ziel dieser Bachelorarbeit ist es, den Methoden der theoretischen Physik zu folgen. Als Diskussionsthema wurde dafür die Sportart Kugelstoßen ausgewählt. Die zu behandelnden Probleme sind in der klassischen Mechanik angesiedelt.

Der Vorteil des Themengebiets der klassischen Mechanik liegt darin, dass der Fokus nahezu ausschließlich auf das Erlernen der Arbeitsmethoden in der theoretischen Physik gelegt werden kann und nicht die Anwendung von Spezialwissen, wie z.B. moderner Quantenfeldtheorie, im Vordergrund steht. Die genauen Regeln der Sportart können dabei vernachlässigt werden. Wir werden nur die Masse der Kugel im Wettkampf der Herren von 7,235 kg, sowie deren Radius von 6 cm verwenden.

Die Sportart Kugelstoßen ist physikalisch sehr interessant, da die Bahnkurve, welche die Kugel nach dem Stoß zurücklegt, physikalisch leicht beschreibbar ist. Die Herausarbeitung der zentralen Variablen für einen erfolgreichen Stoß, sowie die genaueren Betrachtungen dieser werden mit den Methoden der theoretischen Physik durchgeführt. Das Ziel ist nach ausführlicher mathematischer Betrachtung unter Zuhilfenahme von physikalischen Gesetzen und Näherungen, Aussagen über die optimalen Wurfparameter, Wurfvorhersagen und interessante, noch nicht beobachtete oder erklärbare, Details aufzeigen.

Die Bahnkurve wird dabei in mehreren Schritten berechnet. Zusätzlich zu den analytischen Rechnungen wurde ein Computerprogramm geschrieben, das die numerische Berechnung der Wurfbahn mit Luftreibung ausführt. Dieses Programm wird uns helfen, davor angewandte Näherungen zu bewerten und Aussagen über den Einfluss des Windes treffen zu können. Die Simulation mit Hilfe des Computers ist ebenfalls eine wichtige Methode der theoretischen Physik und wurde deshalb auch mit in die Arbeit aufgenommen. So wurden

auch Computerprogramme zum Lösen und zur graphischen Darstellung von Gleichungen verwendet.

Obwohl die meisten Rechnungen in dieser Arbeit per Hand durchgeführt worden sind, wurde für das Überprüfen der Ergebnisse und die Berechnung einiger Gleichungen die Computeralgebraprogramme *Maple* und *Mathematica* verwendet. Die numerischen Berechnungen des Keltischen Wackelsteins wurden mit dem Programm *MATLAB* durchgeführt.

Des Weiteren werden wir das Gegenspiel einiger wichtiger Variablen, wie die Abwurfhöhe gegen den optimalen Winkel, oder den optimalen Winkel gegen die Abwurfgeschwindigkeit, diskutieren. Auch die für einen erfolgreich Stoß notwendige Abstoßtechnik kann physikalisch näher untersucht werden. Dies ist jedoch aufgrund der Komplexität der Struktur nicht leicht, da es sich um ein Problem mit sehr vielen unbekanntem Parametern handelt. In dieser Bachelorarbeit werden die wichtigsten Merkmale von drei sehr wichtigen Techniken, dem Standstoß, dem Drehstoß und der O'Brien-Technik, herausgearbeitet. Diese Merkmale sollen anschließend verglichen werden, um daraus Schlüsse für die Verwendung der Techniken ziehen zu können.

2 Physik des Wurfes

Bevor wir uns mit der Technik des Wurfes beschäftigen, ist eine physikalische Diskussion des Wurfes notwendig, wie sie z.B. bereits von [Luc05] durchgeführt wurde. Wir zielen dabei auf einen Erkenntnisgewinn bezüglich der Anforderungen für einen langen Wurf ab. Im Mittelpunkt der Diskussion wird dabei die Abhängigkeit des Wurfes von den Variablen

- Höhe des Abwurfes (Schulterhöhe des Athleten und gewisser Teil seiner Armlänge),
- Winkel des Abwurfes und
- Abwurfgeschwindigkeit der Kugel

stehen. Als Näherung werden wir dabei annehmen, dass

- die Kugel punktförmig mit der Masse m ist,
- die Luftreibung vernachlässigbar klein sein soll und
- die Art der Energiegewinnung (Technik) sich nicht auf den Wurf auswirkt.

Zunächst gehen wir vom sehr einfachen Fall des Wurfes ohne Abwurfhöhe h aus. Anschließend wird das Modell um die Abwurfhöhe erweitert und die erhaltene Bewegungsgleichung näher analysiert. Dabei werden wir v.a. das Zusammen- und Gegenspiel einiger Variablen betrachten. Zuletzt werden wir auf die Vakuumnäherung verzichten und numerische Berechnungen durchführen. In diesem Zusammenhang werden wir die Ergebnisse mit realen Daten vergleichen und die Auswirkungen diverser Windgeschwindigkeiten betrachten.

2.1 Vorüberlegung ohne Abwurfhöhe

Am Anfang steht die Frage nach den auf die Kugel wirkenden Kräften. Nachdem wir von Würfen auf der Erdoberfläche ausgehen, wissen wir bereits, dass wir uns im Graviationspotential der Erde befinden. Dort wirkt eine Kraft (sog. „Erddanziehungskraft“ oder allgemein *Gravitationskraft*) in Form von

$$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{e}_r = -m\vec{g}, \quad \vec{g} \equiv G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r,$$

auf die Kugel. Dabei steht $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$ für die sog. Gravitationskonstante, r für den Abstand zwischen den beiden Massen m und M und \vec{e}_r für den radialen Einheitsvektor. Folgen wir der Newton'schen Mechanik gelangen wir über $h \ll r_E$, wobei r_E den Radius der Erde bezeichnet und h die Abwurfhöhe (relativ zur Erdoberfläche) ist, schnell zu

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = -m\vec{g}.$$

Wir stellen also fest, dass sich die Kugel mit dem Betrag des Vektors \vec{g} auf den Erdmittelpunkt bewegen wird, d.h. sie wird mit $g \approx 9,81 \text{ m}/\text{s}^2$ fallen. Um nun eine Ort-Zeitabhängigkeit zu erhalten müssen wir nur die Gleichung $\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = -\vec{g}$ integrieren. Wir erhalten

$$\vec{r}(t) = - \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \vec{g} = -\frac{1}{2} \vec{g} (t^2 - t_0^2) + \vec{g} \cdot t_0 (t - t_0) + \vec{v}(t_0) (t - t_0) + r(t_0).$$

Mit den Anfangsbedingungen $t_0 = 0$, $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ und $\vec{r}(t_0) = 0$, sowie $\vec{g} = g \cdot \vec{e}_y$, wobei \vec{e}_y den y Einheitsvektor $\vec{e}_y = (1, 0, 0)$ bezeichnet, können wir nun direkt eine Bewegungsgleichung herleiten. Wir spalten dazu unseren Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_0 in x - und y -Komponente auf. Dies erreichen wir indem wir einen Winkel α , welcher zwischen der horizontalen (x -) Achse und unserem Vektor liegt, einführen. Somit ergibt sich

$$\vec{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Bewegungsgleichung für die $y(t)$ -Koordinate lautet somit

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + [v_0 \sin(\alpha)] \cdot t. \tag{2.1}$$

Für die $x(t)$ -Komponente ergibt sich demnach

$$x(t) = [v_0 \cos(\alpha)] \cdot t. \tag{2.2}$$

Dabei wurde für beide Komponenten bereits der Abwurfwinkel α berücksichtigt. Wir haben also zwei Gleichungen für die beiden Variablen x und t gefunden. Damit gelangen wir zu dem Ergebnis der Wurfparabel, welche gegeben ist durch

$$y(x) = x \tan(\alpha) - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}. \quad (2.3)$$

Eine Diskussion dieser Gleichung führt uns zunächst zur Wurfweite x_w . Wir können direkt sehen, dass für x_w folgende Beziehung gelten muss:

$$y(x_w) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_w \left(\tan(\alpha) - \frac{x_w}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Wir haben also zwei mögliche Werte für x_w gefunden. Den ersten Wert x_{w_1} können wir sofort streichen, da dieser gleich 0 (Ursprung) ist und somit die triviale Lösung darstellt. Diese triviale Lösung tritt dann ein, wenn die Kugel gar nicht erst geworfen wird. Wir interessieren uns also nur für den zweiten Wert, $x_{w_2} \equiv x_w$. Für diesen gilt

$$x_w = \frac{2v_0^2 \tan(\alpha) \cos^2(\alpha)}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha).$$

Wir sehen, dass die Wurfweite vom

- Abwurfwinkel und der
- Abwurfgeschwindigkeit

abhängt. Während die Abwurfgeschwindigkeit quadratisch vorkommt, steht der Abwurfwinkel als Argument in einer Sinus-Funktion. Eine Diskussion des optimalen Abwurfwinkels ist daher notwendig. Wir wissen, dass $\sin(\pi/2) = 1$ ($\alpha \in [0, \pi]$) maximal ist. Daher folgt

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Für $g = 10 \text{ m/s}^2$ und $v_0 = 10 \text{ m/s}$ wurden die Wurfparabel für diverse Winkel $\alpha \in \{\pi/8, \pi/6, \pi/4, \pi/3\}$ geplottet (Abbildung 2.1). Man erkennt sofort, dass die Wurfweite für $\alpha = \pi/4$ maximal ist, was unsere Rechnung bestätigt.

Eine weitere interessante Größe in Form der Flugzeit t erhalten wir durch Gleichsetzen von $x(t)$ mit x_w und Auflösen nach t , also

$$t_w = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}. \quad (2.5)$$

Hierfür erhalten wir ein Maximum der Wurfzeit bei $\alpha = \pi/2$, was dem senkrechten Wurf nach oben entspricht. Wir wollen nun einen Schritt weitergehen und den Wurf von einer bestimmten Höhe h aus betrachten.

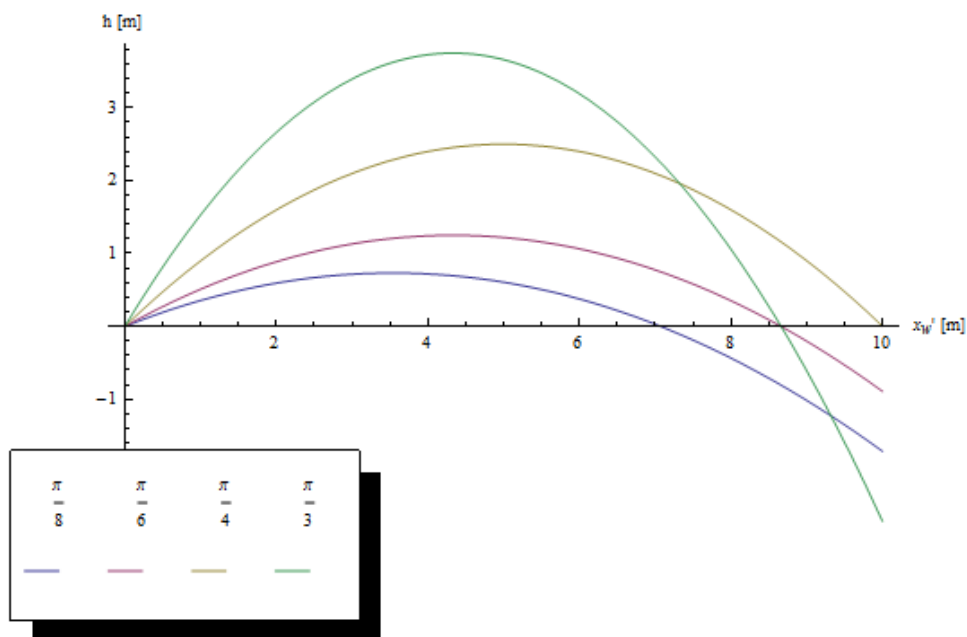


Abbildung 2.1: Plot der Wurfparabel ab $h = 0^+$ bis $h = 0^-$ für $g = 10 \text{ m/s}^2$ und $v_0 = 10 \text{ m/s}$ bei $\alpha \in \{\pi/8, \pi/6, \pi/4, \pi/3\}$

2.2 Der Wurf

2.2.1 Herleitung der Wurfweite mit Abwurfhöhe

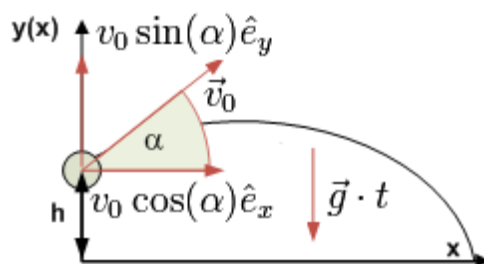


Abbildung 2.2: Skizze unseres Modells des Wurfes beim Kugelstoßes

Um unsere Ergebnisse beibehalten zu können ist es sinnvoll statt der Betrachtung des Problems mit einer Anfangshöhe, die Betrachtung einer negativen Endhöhe vorzuziehen. Das heißt wir setzen den „Nullpunkt“ unseres Wurfes auf die Höhe h . Dies entspricht einer Koordinatentransformation der y -Achse, weshalb unsere Endhöhe (welche für die Diskussion der optimalen Wurfweite entscheidend war) nun statt bei 0 bei $-h$ liegt. Eine

Illustration dieser Betrachtung zeigt Abbildung 2.2.

Eine Erweiterung der Abbildung 2.1 findet sich in Abbildung 2.3 wieder. Die rote Linie ist dabei „der Boden“, also die um $-h$ verschobene Nulllinie. Man kann erkennen, dass der $\alpha = \pi/4$ -Wurf nicht mehr das optimale Ergebnis darstellt.

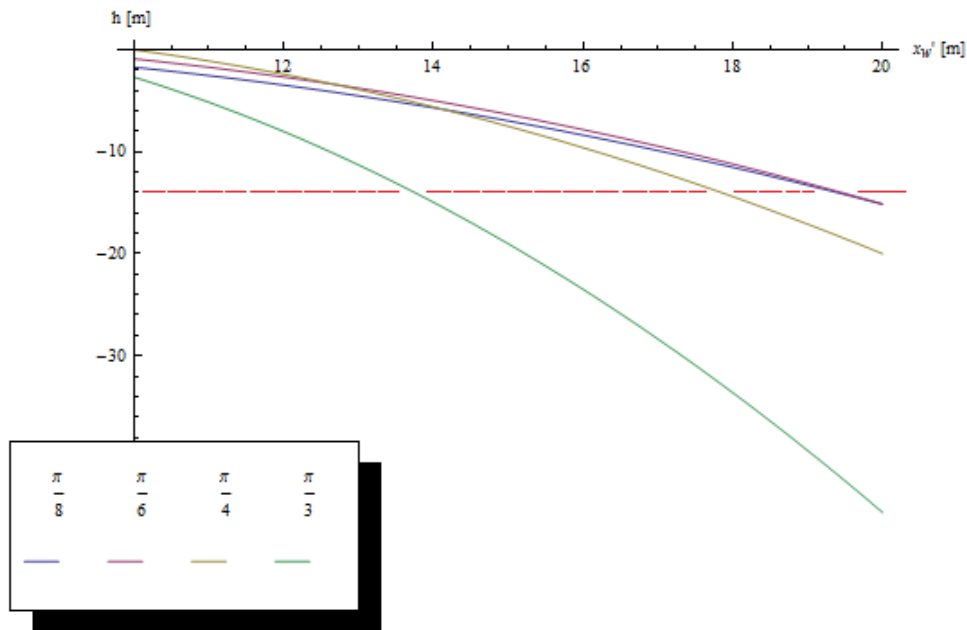


Abbildung 2.3: Plot der Wurfparabel ab $h = 0$ bis $h = -14$ m für $g = 10$ m/s² und $v_0 = 10$ m/s bei $\alpha \in \{\pi/8, \pi/6, \pi/4, \pi/3\}$

Die genauen Relationen müssen im Folgenden erarbeitet werden. Dazu führen wir zunächst wieder eine Wurfweitenberechnung analog zu Formel 2.4 durch. Mit Berücksichtigung der Koordinatentransformation folgt jetzt

$$y(x'_w) = -h \quad \Rightarrow \quad x'_w \left(\tan(\alpha) - \frac{x'_w}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} \right) = -h.$$

Diese Gleichung ist nun etwas schwieriger zu lösen als für den Fall ohne Abwurfhöhe. Mit Hilfe der Mitternachtsformel für quadratische Gleichungen gelangen wir auf

$$x'_{w1/w2} = \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \mp v_0 \cos(\alpha) \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2(\alpha) + \frac{2h}{g}}.$$

Wir sehen sofort, dass der zweite Term größer ist als der erste, weshalb die Lösung x'_{w1} negativ ist. Wir interessieren uns im Folgenden nur für die positive Lösung $x'_w \equiv x'_{w2}$. Durch

Ausnutzen von $\cos(\alpha) \sin(\alpha) = \sin(2\alpha)/2$ können wir diese Lösung ein wenig vereinfachen und erhalten

$$x'_w = x(-h) = v_0 \cos(\alpha) \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2} \sin^2(\alpha)} + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha). \quad (2.6)$$

Die Abwurfhöhe tritt also direkt in der Wurfweite x'_w auf. Man kann sehen, dass im Falle von $x'_w|_{h=0}$ gleich x_w gilt. Wir wollen dieses zentrale Ergebnisse nun ausführlich diskutieren.

2.2.2 Optimaler Abwurfwinkel beim Wurf mit Abwurfhöhe

Wir wissen bereits, dass für den Fall $h = 0$ (Wurf ohne Abwurfhöhe) der optimale Winkel bei $\alpha_{\text{opt}}|_{h=0} = \pi/4$ liegt. Wir wollen jetzt den optimalen Abwurfwinkel für eine beliebige Höhe h berechnen.

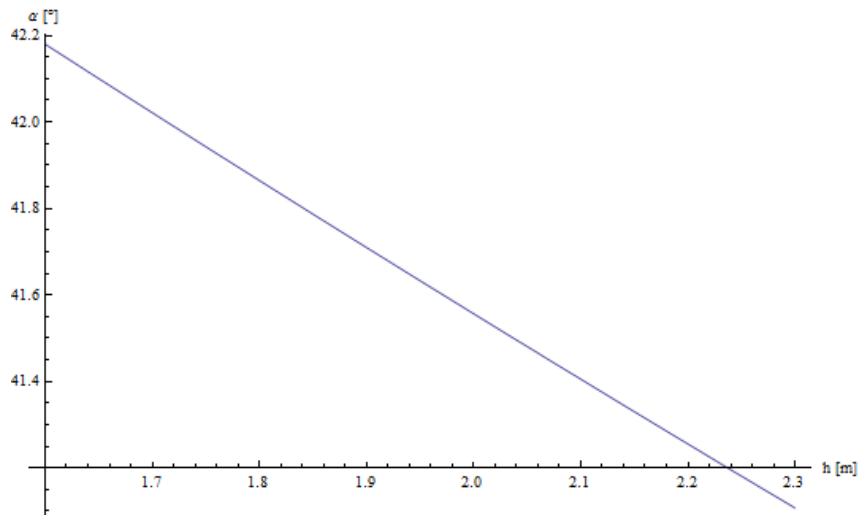


Abbildung 2.4: Optimaler Abwurfwinkel für $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ und $v_0 = 12 \text{ m/s}$ bei Variation der Abwurfhöhe

Den optimalen Abwurfwinkel erhalten wir, wie bereits im Fall des Wurfes ohne Abwurfhöhe, durch Ableiten unserer zentralen Bewegungsgleichung 2.6 nach dem Winkel α . Es folgt

$$\frac{dx'_w}{d\alpha} = -v_0 \sin(\alpha_{\text{opt}}) \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2} \sin^2(\alpha)} + \frac{v_0^3 \cos^2(\alpha) \sin(\alpha)}{g^2 \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2} \sin^2(\alpha)}} + \frac{v_0^2}{g} \cos(2\alpha).$$

Um die Extremwerte des Winkels zu erhalten setzen wir nun

$$\frac{dx'_w}{d\alpha} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2}\right)}}. \quad (2.7)$$

Wir erkennen, dass wir für den Fall $h = 0$ unser bekanntes Ergebnis $\alpha_{\text{opt}} = 45^\circ$ erhalten. Für Abwurfhöhen $h \neq 0$ ergeben sich nun kleinere Winkel als 45° . So erhalten wir für realistische Höhen im Bereich von etwa $h \approx 2$ m mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \approx 12$ m/s einen Winkel von etwa $\alpha_{\text{opt}} \approx 41,5^\circ$. Interessant ist also, dass wir für den optimalen Abwurfwinkel α eine Abhängigkeit der Anfangshöhe und Anfangsgeschwindigkeit erhalten haben. Je größer also der Athlet ist, desto flacher muss er werfen um die optimale Reichweite zu erhalten (siehe Abbildung 2.4).

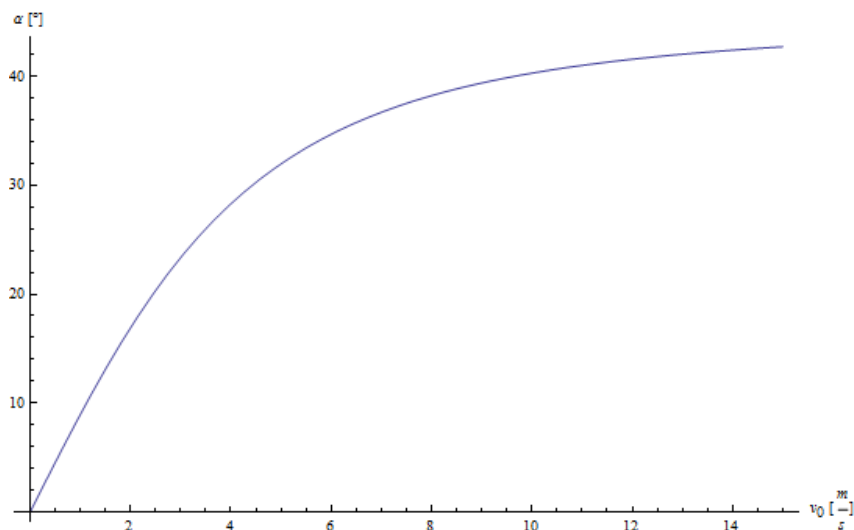


Abbildung 2.5: Optimaler Abwurfwinkel für $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ und $h = 2 \text{ m}$ bei Variation der Abwurfgeschwindigkeit

Auf der anderen Seite nimmt der optimale Abwurfwinkel mit wachsender Anfangsgeschwindigkeit zu. Dies ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Im Gegensatz zur Abhängigkeit von der Höhe verläuft die die Abhängigkeit von Anfangsgeschwindigkeit keineswegs linear. Wir können das entsprechende Verhalten über die Ableitung einsehen. So erhalten wir für die Abhängigkeit des optimalen Abwurfwinkels nach der Abwurfhöhe

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{\text{opt}}}{dh} &= -\frac{g}{v_0^2 (2 + 2hg/v_0^2)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (2 + 2hg/v_0^2)}} \approx \\ &\approx -\frac{g}{v_0^2 2^{3/2} (1 - 1/2)^{1/2}} = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $hg/v_0^2 \rightarrow 0$ genähert. Ein kurzer Abgleich mit Abbildung 2.4 bestätigt unsere Näherung. Für die Abhängigkeit des optimalen Abwurfwinkels nach der Abwurfgeschwindigkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{\text{opt}}}{dv_0} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{-4hg/v_0^3}{(2 + 2hg/v_0^2)^{3/2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (2 + 2hg/v_0^2)^{-1}}} \right) \approx \\ &\approx \frac{hg}{v_0^3} \frac{2}{\sqrt{8}(1 - 1/2)^{1/2}} = \frac{hg}{v_0^3}. \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall konnten wir unsere Näherung vollziehen. Hier ist zu beachten, dass diese Näherung nur unter den Wurzeltermen gültig ist, da diese weniger stark beitragen als die vollen Faktoren. Dieses Ergebnis bestätigt den Verlauf der Kurve in Abbildung 2.5 und zeigt wieso sich die Kurve mit steigender Abwurfgeschwindigkeit immer weniger stark ändert (proportional zu v_0^{-3}).

2.2.3 Abhängigkeit der Wurfweite von der Abwurfhöhe

Die Abwurfhöhe spielt offensichtlich eine wichtige Rolle für die Wurfweite. Dies stellt für Athleten, welche über eine überdurchschnittliche Länge von Schulterhöhe zusammen mit der Armlänge verfügen, eindeutig einen Vorteil dar. Wir wollen nun einige Untersuchungen zu den Auswirkungen der Abwurfhöhe vornehmen. Zunächst setzen wir einige Beispieldaten in unsere Bewegungsgleichung 2.6 ein. Wir erhalten bei jeweils unveränderter Abfluggeschwindigkeit $v_0 = (12-14)$ m/s und unverändertem Abflugwinkel $\alpha = (41-42)^\circ$ durch eine Abnahme der Abflughöhe von 2,2 m auf 2,1 m eine Abnahme der Flugweite x'_w um $\approx 0,1$ m. In Abbildung 2.6 sind die erhaltenen Wurfweiten x'_w bei $v_0 = 13$ m/s mit optimalen Abwurfwinkel $\alpha = \alpha_{\text{opt}}(h)$ in Abhängigkeit von der Abwurfhöhe h dargestellt.

Trotz der nichttrivialen Gleichung in Form von

$$x'_w = \sqrt{v_0^2 \left(1 - \frac{1}{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)} \right)} \left[\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2} \frac{1}{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)}} + \frac{v_0}{g} \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)}} \right],$$

ergibt sich also eine lineare Abhängigkeit der Wurfweite von der Abwurfhöhe. Unser Ziel ist es, diese Abhängigkeit mathematisch zu zeigen. Zunächst versuchen wir daher über die

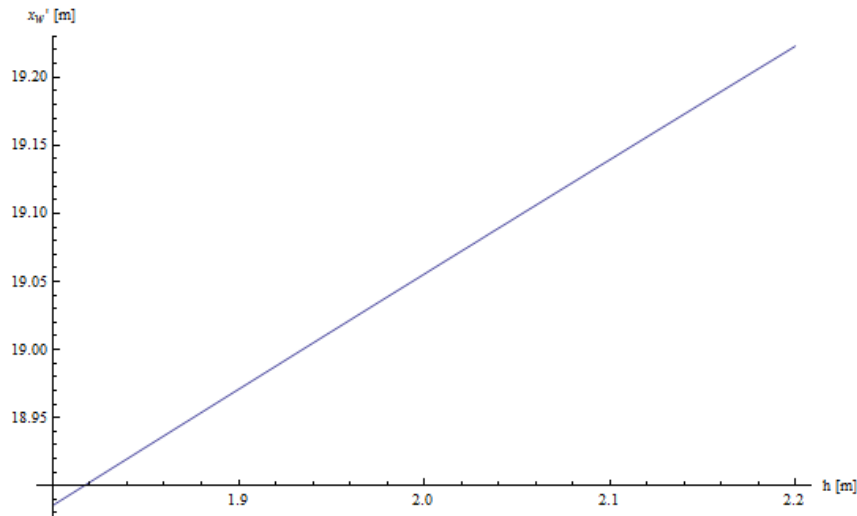


Abbildung 2.6: Wurfweite x'_w [m] in Abhängigkeit der Abwurfhöhe h [m] bei $\alpha = \alpha_{\text{opt}}(h)$ und $v_0 = 13$ m/s

Ableitung nach h von Gleichung 2.6 mit $\alpha = \alpha_{\text{opt}} = \arcsin\left((2 + 2hg/v_0^2)^{-1/2}\right)$ zu einem Ergebnis zu gelangen. Mit $\psi \equiv (2 + 2hg/v_0^2)$ ergibt sich

$$\frac{dx'_w}{dh} = \frac{g\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2\psi}}}{v_0\sqrt{1 - \frac{1}{\psi}\psi^2}} + \frac{v_0\sqrt{1 - \frac{1}{\psi}\left(\frac{2}{g} - \frac{2}{g\psi^2}\right)}}{2\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2\psi}}} - \frac{\cos\left(2\arcsin\left(\psi^{-\frac{1}{2}}\right)\right)}{\psi^{\frac{3}{2}}\sqrt{1 - \psi^{-1}}}.$$

Wir verwenden dies nun in einer Taylorentwicklung um $hg/v_0^2 = 0$, da im für uns interessanten Bereich $hg/v_0^2 \approx 0,2$ klein ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x'_w(h) &\approx \frac{v_0^2}{g} \left[1 + \frac{hg}{v_0^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{hg}{v_0^2} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{hg}{v_0^2} \right)^3 \right] \approx \\ &\approx \left[\frac{v_0^2}{g} \right] + h - \left[\frac{g}{2v_0^2} \right] h^2 + \dots \end{aligned}$$

Wir sehen sofort, dass alle Terme mit der Ordnung von $(hg/v_0^2)^2$ sehr klein sind, da v_0^2 in dem für uns interessanten Bereich größer als hg ist. Somit können wir die lineare Abhängigkeit der Wurfweite x'_w bei optimalen Abstoßwinkel $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$ von der Abwurfhöhe h über die Taylorreihe einsehen.

2.2.4 Zusammenhang Abwurfgeschwindigkeit und Abwurfwinkel

Was wir bis jetzt erkennen konnten ist, dass die Anfangsgeschwindigkeit v_0 eine zentrale Rolle annimmt. Ein Athlet sollte also die Anfangsgeschwindigkeit maximieren, d.h. mit möglichst großer Kraft stoßen. Des Weiteren sollte ein Athlet möglichst nahe am optimalen Abstoßwinkel α_{opt} sein, da er dadurch zum einen höher abstößt als unterhalb des optimalen Winkels und zum anderen die Höhe des Abstoßes besser ausnutzt. Diese beiden Kriterien, also die Maximierung der Anfangsgeschwindigkeit und das Einhalten des optimalen Abstoßwinkels, stehen im Konflikt zueinander, da der optimale Abwurfwinkel in jedem Fall über 0° liegt, während ein Athlet seine maximale Abstoßkraft bei $\alpha = 0^\circ$ erreicht. Somit muss ein Athlet einen guten Mittelweg zwischen einer maximalen Abstoßgeschwindigkeit v_0 und dem optimalen Abstoßwinkel α_{opt} finden.

Nachdem die Muskulatur von Athlet zu Athlet anders aufgebaut sein kann, abhängig vom vorausgehenden Training und der genetischen Veranlagung der Person, ist es nicht möglich ein allgemeines Muskulaturmodell zu erstellen. Allerdings können wir einen für die meisten Athleten gültigen Zusammenhang zwischen der Kraft im Arm nach vorne und der Kraft im Arm nach oben feststellen, also

$$F(\alpha) = c(\alpha) \cdot \underbrace{F_{\text{Arm, nach vorne}}}_{\equiv \bar{F}_{\text{max}}}, \quad c(\alpha)|_{\alpha=0} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{dc(\alpha)}{d\alpha} < 0. \quad (2.8)$$

Das bedeutet, dass die nach vorne zur Verfügung stehende Kraft ($\alpha = 0$) für Athleten, welche unserem Modell entsprechen, größer ist als die Kraft nach oben ($\alpha = \pi/2$). Folgerichtig fällt es solchen Athleten leichter die Abwurfgeschwindigkeit v_0 in die $\cos(\alpha)$ -Komponente zu maximieren. Wir wollen dies im Folgenden anhand eines einfachen Modells aus [Lic78], wobei

$$v_0 \approx \sqrt{\Omega F} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \Omega F,$$

diskutieren. Wir verwenden einen Vorfaktor Ω , welchen wir für diese Rechnung nicht näher bestimmten werden und in Beispielkalkulationen 1 setzen, da er für den qualitativen Verlauf keine Rolle spielt. Die Kraft F stellt die Durchschnittskraft dar, welche auf die Kugel wirkt. Diese ist winkelabhängig, weshalb wir durch einsetzen von $v_0(\alpha) = \sqrt{\Omega F(\alpha)}$ mit $F(\alpha) \equiv c(\alpha)\bar{F}_{\text{max}}$ in unsere Bewegungsgleichung 2.6 erhalten, dass

$$x'_w = \cos(\alpha) \sqrt{F(\alpha)\Omega \frac{2h}{g} + F^2(\alpha)\Omega^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{g^2}} + \frac{\sin(2\alpha)}{2g} F(\alpha)\Omega. \quad (2.9)$$

Wir erkennen sofort, dass der optimale Winkel sich entsprechend verschiebt, je nachdem welche Gestalt die Kraftkomponente $F(\alpha)$ besitzt. Wir wollen dies nun an einem Beispiel illustrieren. Wir gehen zunächst davon aus, dass der Athlet unserem Modell folgt und seine maximale Kraft nach vorne besitzt. Nach oben ($\alpha = \pi/2$) soll er noch 1/2 der Kraft besitzen. Um die Abhängigkeit sehr einfach zu halten, geben wir unserem Beispielathleten einen linearen Zusammenhang mit, weshalb sich die Funktion $c(\alpha)$ berechnet zu

$$c(\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \Rightarrow F(\alpha) = \bar{F}_{\max} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right).$$

Setzen wir den Vorfaktor Ω für Testzwecke gleich 1 m/kg und zeichnen die ursprüngliche Bewegungsgleichung und die veränderte Bewegungsgleichung in Abhängigkeit des Winkels α , so stellen wir folgendes mit Hilfe von Abbildung 2.7 fest:

1. Die Wurfweite hat sich verringert.
2. Der optimale Abwurfwinkel (das Maximum der Funktion in Abhängigkeit des Winkels) ist nach links versetzt (grob abgeschätzt bei $(37 \pm 2)^\circ$).

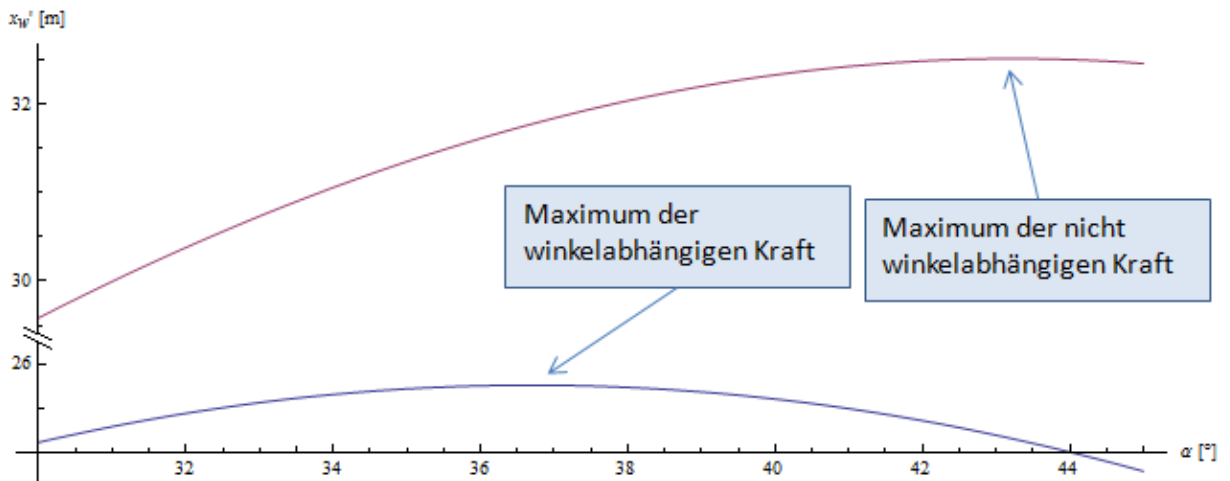


Abbildung 2.7: Wurfweite x'_w [m] in Abhängigkeit des Abwurfwinkels bei einer beispielhaften winkelabhängigen Kraft (blau) und bei einer winkelunabhängigen Kraft (violett) mit $\bar{F}_{\max} = 300$ [N] mit $\Omega = 1$ m/kg bei $h = 2$ m

Es sind auch komplexere Funktionen denkbar, welche 2.8 erfüllen. Wir werden dies nun an einem fortgeschrittenen realistischen Beispiel einsehen. Wir setzen nun

$$c(\alpha) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\alpha)].$$

Um den Verlauf genauer bestimmen zu können müssen wir dies in Gleichung 2.9 einsetzen. Durch $F(\alpha) = c(\alpha) \cdot F$ und $[1 + \cos(\alpha)] = 2 \cos^2(\alpha/2)$ erhalten wir

$$x'_w = \cos(\alpha) \sqrt{F\Omega \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{2h}{g} + F^2\Omega^2 \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2g} F\Omega \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Wir betrachten nun den qualitativen Verlauf der neuen Wurfweite in Abhängigkeit des Abwurfwinkels für einige Werte von F , dargestellt in Abbildung 2.8.

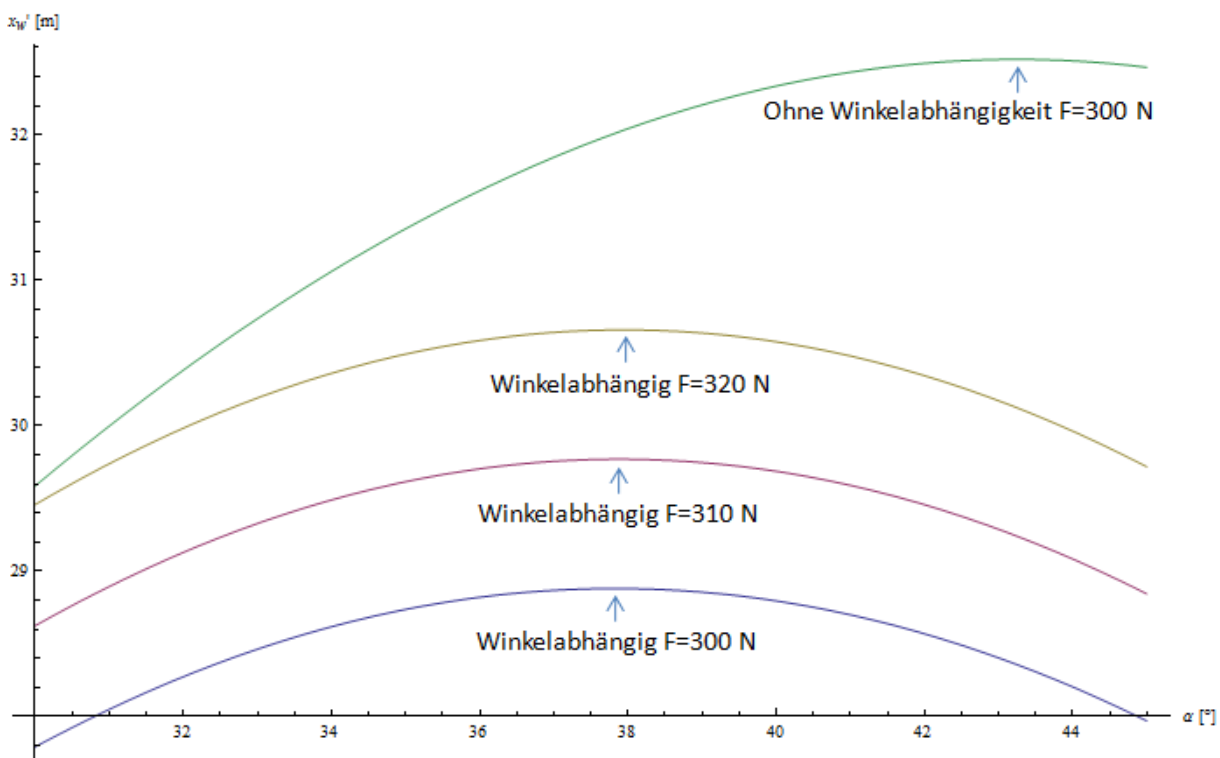


Abbildung 2.8: Wurfweite x'_w [m] in Abhängigkeit des Abwurfwinkels bei einer winkelabhängigen Kraft der Form $F \cos^2(\alpha/2)$ bei $F = 300, 310, 320$ N und bei einer winkelunabhängigen Kraft mit $F = 300$ N mit $\Omega = 1$ m/kg bei $h = 2$ m

Im Gegensatz zum einfachen Modell können wir hier feststellen, dass der optimale Winkel ein wenig in Richtung in des optimalen Winkels für eine winkelunabhängige Kraft verschoben wurde. Des Weiteren erkennen wir, dass sich der optimale Abwurfwinkel mit Erhöhung der Kraftstärke ebenfalls nach rechts verschiebt. Der optimale Winkel wäre immer bei ungefähr $\approx 38^\circ$.

2.2.5 Zusammenhang Abwurfhöhe und Abwurfwinkel

Bis jetzt haben wir immer die Abwurfhöhe h verwendet. Dies ist beim Kugelstoßen jedoch nicht ohne weiteres gegeben, da diese Komponente aus mehreren Teilen besteht. Hier setzt sich die Abwurfhöhe aus den Komponenten Schulterhöhe h_s , Armlänge l und dem Abwurfwinkel α zusammen. Es ergibt sich

$$h = h_s + l \cdot \sin(\alpha). \quad (2.10)$$

Wir sehen also, dass die Abwurfhöhe h vom Abwurfwinkel α abhängt. Allerdings wissen wir bereits, dass der optimale Abwurfwinkel wiederum von der Abwurfhöhe h abhängt. Dieses Problem kann z.B. grafisch gelöst werden indem wir die beiden Gleichungen 2.7 und 2.10 gegeneinander zeichnen, wie in Abbildung 2.9.

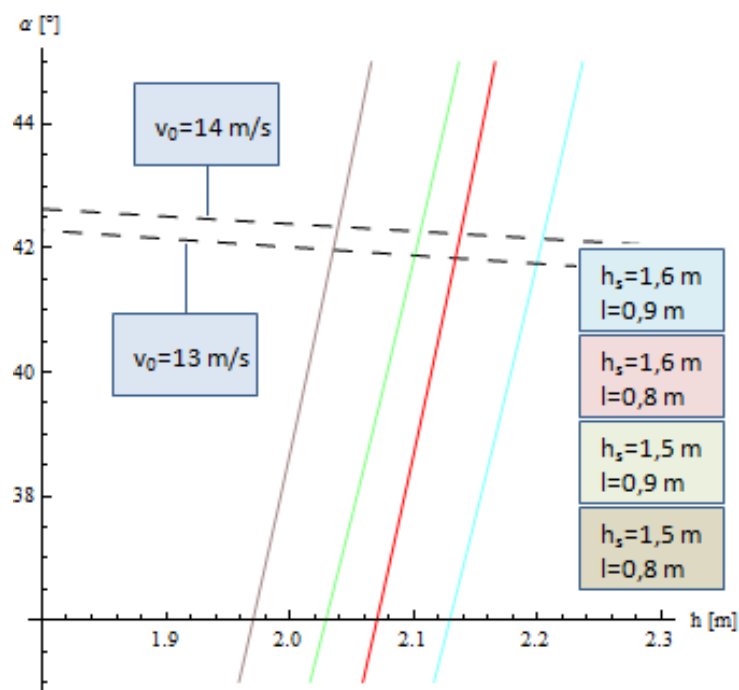


Abbildung 2.9: Optimaler Abwurfwinkel in Abhängigkeit der Abwurfhöhe gegen die Abwurfhöhe in Abhängigkeit des Abwurfwinkels für $v_0 \in \{13, 14\}$ m/s, $l \in \{80, 90\}$ cm und $h \in \{150, 160\}$ cm

Wir erkennen, dass sich der optimale Abwurfwinkel mit größerem Winkel verringert, d.h., dass man mit größerem Abwurfwinkel noch näher am optimalen Abwurfwinkel liegt, als direkt zu erkennen ist. Außerdem sehen wir, dass sich die Abwurfhöhe und der optimale

Winkel bei einer bestimmten Abwurfhöhe immer schneiden. Dieser Winkel liegt immer im Bereich von $\approx (42 \pm 1)^\circ$. Dies ist genau der Bereich, den wir anfangs für den optimalen Winkel berechnet haben. Dies können wir über die Steigungen der beiden Funktionen einsehen. Während sich der optimale Winkel in Abhängigkeit von der Abwurfhöhe nur geringfügig ändert, ändert sich die Abwurfhöhe bei Variation des Abwurfwinkels sehr schnell. Wir können dies ebenfalls durch eine kurze Rechnung einsehen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \sin \alpha_{\text{opt}} &= \frac{1}{\sqrt{2 + 2hg/v_0^2}} \Big|_{h=h_s+l\sin(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2(h_s + l\sin(\alpha_{\text{opt}}))g/v_0^2}}, \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha_{\text{opt}} &= \frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2h_s g + 2gl \sin(\alpha_{\text{opt}})}, \\ \Leftrightarrow 2 \left[1 + \frac{h_s g}{v_0^2} \right] &= \frac{1}{\sin^2 \alpha_{\text{opt}}} \left[1 - \frac{2lg \sin^3 \alpha_{\text{opt}}}{v_0^2} \right], \\ &\Rightarrow \approx 2lg \sin^3 \alpha_{\text{opt}} \rightarrow 0, \quad \text{da } \sin^3 \alpha_{\text{opt}} \ll 1, \\ \Rightarrow \sin \alpha_{\text{opt}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2 + 2h_s g/v_0^2}}. \end{aligned}$$

Somit ist die stärkere Abhängigkeit der optimalen Abwurfhöhe durch die Schulterhöhe gegeben, weshalb sich der optimale Abwurfwinkel nur geringfügig durch die Wahl des Abwurfwinkels ändert. In Tabelle 2.1 ist dies an einigen Zahlenbeispielen illustriert.

Höhe h_s [cm]	Länge l [cm]	Abwurfhöhe h [cm]	Winkel α [°]	op. Winkel α_{opt} [°]
150	80	190	30	42,14
⋮	⋮	201	40	41,99
160	80	187	20	41,18
⋮	⋮	200	30	41,01
		211	40	41,86
160	90	191	20	42,13
⋮	⋮	205	30	41,94
		217	40	41,77
170	90	215	30	41,81
⋮	⋮	227	40	41,64

Tabelle 2.1: Betrag des optimalen Abwurfwinkels für verschiedene Abwurfhöhen und deren zugehörigen Abwurfwinkel

2.2.6 Flugzeit der Kugel mit Abwurfhöhe

Auch für den Fall des Wurfes mit Anfangshöhe interessiert uns die Flugzeit t'_w . Als Ausgangspunkt verwenden wir das Ergebnis von Gleichung 2.5. Zusätzlich benötigen wir noch die Zeit Δt , welche für die zusätzliche Strecke vom Durchschreiten des Nullpunktes zur Bodenhöhe $-h$ benötigt wird. Dies verwenden wir abschließend in

$$t'_w = t_w + \Delta t.$$

Wir berechnen jetzt die zusätzliche Wegstrecke Δx . Diese ergibt sich aus der Gleichung 2.6 zu

$$\Delta x = x(-h) - x(0) = v_0 \cos(\alpha) \left[\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2} \sin^2(\alpha)} - \frac{v_0}{g} \sin(\alpha) \right].$$

Somit haben wir die x -Achsendifferenz Δx gefunden. Über $v_0 \cos(\alpha) \Delta t = \Delta x$ erhalten wir nun

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_0 \cos(\alpha)} = \left[\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2} \sin^2(\alpha)} - \frac{v_0}{g} \sin(\alpha) \right].$$

Als Gesamtzeit ergibt sich damit mit Hilfe von Gleichung 2.5

$$t'_w = t_w + \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2} \sin^2(\alpha)} + \frac{v_0}{g} \sin(\alpha). \quad (2.11)$$

Bei Wahl des optimalen Winkels α_{opt} erhalten wir somit bei einer Abwurfhöhe h von 2 m die in Tab. 2.2 dargestellten Werte für verschiedene Abwurfgeschwindigkeiten v_0 .

v_0 [m/s]	10	11	12	13	14
t'_w [s]	1,68	1,81	1,94	2,07	2,20
x'_w [m]	12,03	14,20	16,56	19,13	21,89

Tabelle 2.2: Flugzeiten t'_w [s] und Wurfweiten x'_w [m] in Abhängigkeit von der Abwurfgeschwindigkeit v_0 [m/s] bei einer Abwurfhöhe von 2 m und optimalen Abwurfwinkel

Trotz der recht komplizierten Form erhalten wir einen linearen Zusammenhang der Flugzeit t'_w von der Abwurfgeschwindigkeit v_0 in dem für uns interessanten Bereich. Eine Untersuchung der Ableitung liefert uns

$$\frac{dt'_w}{dv_0} = \frac{v_0 \sin^2(\alpha)}{g^2 \sqrt{\frac{2h}{g}} \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2hg}}} + \frac{\sin(\alpha)}{g}.$$

Wir erkennen, dass im für uns interessanten Bereich

$$\frac{v_0 \sin^2(\alpha)}{g \sqrt{\frac{2h}{g}}} \gg \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2hg}}$$

gilt, weshalb die Anfangsgeschwindigkeit v_0 im Zähler dominiert. Daher erhalten wir in diesem Bereich eine lineare Abhängigkeit der Flugzeit von der Abwurfgeschwindigkeit.

2.3 Auswirkungen der Luftreibung

2.3.1 Vorüberlegungen zur Luftreibung

Eine der Näherungen bestand darin, die Luftreibung zu vernachlässigen. Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen inwieweit dies gerechtfertigt ist. Die Luft bremst durch Reibung den Körper so, als würde eine geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung \vec{a}_r entgegen seiner Bewegung wirken. Solange die Bewegungsgeschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist, gilt (nach [Bre04, Seite 35])

$$|\vec{a}_r| \propto \vec{v}^2.$$

Wir betrachten im Folgenden den Spezialfall des freien Falles, da für kleine \vec{v} (und somit für unser konstantes v_0) die auftretende Reibungskraft gering ist. Im freien Fall, d.h. mit wachsendem \vec{v} (aufgrund der Fallbeschleunigung g), kommt der Zeitpunkt, an dem sich $|\vec{a}_r|$ und die Fallbeschleunigung kompensieren. Dann fällt der Körper mit der konstanten Grenzgeschwindigkeit \vec{v}_g . Diese wollen wir nun berechnen. Es gilt

$$mg = ma_r \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \rho \xi A v_g^2.$$

Für eine Kugel in Luft ergibt sich für ξ in etwa $1/2$. Die Luftdichte ρ ist Druck- und Temperaturabhängig und hat bei Normaldruck $P = 1 \text{ atm}$ und $T = 293 \text{ K}$ den Wert $\rho = 1,2041 \text{ kg/m}^3$. A bezeichnet den Querschnitt einer Kugel mit Masse m . Durch Umstellen der Gleichungen erhalten wir als Grenzgeschwindigkeit der Kugel

$$v_g \geq \sqrt{\frac{4mg}{\rho A}} = 144,38 \text{ m/s.}$$

Diese Grenzggeschwindigkeit bestätigt unsere Vermutung, dass die horizontale Geschwindigkeitskomponente beim Kugelstoßen nicht in Form einer Grenzggeschwindigkeit betroffen ist, da $v_0 \leq 15 \text{ m/s}$. Der Luftwiderstand wirkt sich aber dennoch auf die Wurfweite x'_w aus, da wir diese zum einen durch Einsetzen der Fallzeit (Lösung der Gleichung $y(t) = -h \rightarrow t$) erhalten haben und zum anderen die horizontale Geschwindigkeitskomponente durch die Luftreibung permanent abgebremst wird. Wir berechnen nun zunächst die hypothetische Zeit, welche für den Fall der Kugel notwendig ist, um die Grenzggeschwindigkeit zu erreichen, falls diese nicht abgebremst wird. Die dadurch erhaltene Zeit ist eine Art untere Grenze für das Erreichen der Fallgrenzggeschwindigkeit.

Wir wissen bereits, dass die Grenzggeschwindigkeit durch die Luftreibung $v_g = g \cdot t_g$ ist, daher wird v_g erreicht bei

$$g \cdot t_g = v_g \geq \sqrt{\frac{4mg}{\rho A}} \quad \Rightarrow \quad t_g \geq \sqrt{\frac{4m}{\rho A g}} \approx 15 \text{ s.}$$

Um dies mit dem Wert für die Flugzeit beim Kugelstoßen vergleichen zu können, müssen wir die maximal erreichbare Höhe beim Kugelstoßen wissen. Mit dem Wissen über die maximal erreichbare Höhe können wir anschließend die Flugzeit beim Kugelstoßen abschätzen.

Wir leiten zunächst einen Ausdruck für die maximal erreichbare Höhe beim Kugelstoßen her, also

$$h_{\max} = h + y\left(\frac{x_w}{2}\right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}gt_f^2. \quad (2.12)$$

Nach Einsetzen von x_w in y und Auflösen der Gleichung 2.12 nach der reinen Fallzeit t_f (ohne Steigzeit - vgl. Gleichung 2.11 für Gesamtzeit) erhalten wir

$$t_f = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2(\alpha) + \frac{2h}{g}}.$$

Ein kurzer Vergleich zwischen t_f mit realistischen Werten ($h = 2 \text{ m}$, $v_0 = 15 \text{ m/s}$ bei $\sin(\alpha) = 1 \rightarrow t_f \approx 1,6 \text{ s}$) und $t_g \approx 15 \text{ s}$ zeigt, dass $t_f \ll t_g$ gilt. Man sieht also, dass die Grenzggeschwindigkeit im Fall nie erreicht wird. Dennoch wird sich durch die Luftreibung eine leicht ballistische Kurve ergeben, da die wirkenden Kräfte $F_w \neq 0$ sind.

2.3.2 Betrachtung des Wurfes mit Wind

Die Kraftauswirkung der Dissipation berechnen wir nun explizit. Bei Windstille herrscht in jede Bewegungsrichtung eine Kraft in Form von

$$F_w = k \cdot v^2, \quad \text{mit } k = \frac{\xi \varrho A}{2},$$

wobei ϱ die Luftdichte ist, A den Querschnitt der Kugel bezeichnet und ξ ein experimentell bestimmter Faktor (sog. Querschnittsfaktor) ist. Für eine Kugel kann man $\xi \approx 1/2$ setzen. Damit erhalten wir

$$F_w = \frac{\varrho A}{4} v^2 = \frac{\varrho \pi r^2}{4} v^2 \stackrel{(*)}{=} 0,0036 \text{ kg/m} \cdot v^2 \ll 1 \text{ N.}$$

Zur Umrechnung (*) wurde $r = 6 \text{ cm}$ eingesetzt. Erst bei $v \approx 16,7 \text{ m/s}$ ist F_w im Bereich von 1 N. Dies zeigt, dass unsere Näherung in Form eines luftleeren Raumes passend ist. Wir erwarten also, dass experimentelle Ergebnisse von den theoretischen Rechnungen um maximal einige Prozent abweichen dürften. Unsere Rechnung lässt sich auch leicht auf den Fall von horizontalen Windgeschwindigkeiten $v_{w,h} \neq 0$ anwenden. Durch eine Koordinatentransformation können wir uns mit dem Wind bewegen und erhalten somit

$$x' = x + v_{w,h} \cdot t, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} x' = \frac{d}{dt} (x + v_{w,h} \cdot t) = v_x + v_{w,h} \equiv v'_x.$$

Analog zu dieser Betrachtung können wir auch vertikale Windgeschwindigkeiten über

$$y' = y + v_{w,v} \cdot t, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} y' = \frac{d}{dt} (y + v_{w,v} \cdot t) = v_y + v_{w,v} \equiv v'_y$$

einfügen. Wir sehen daher, dass es für größere Windgeschwindigkeiten zu stärkeren Abweichungen kommen kann, je nachdem wie schnell der Athlet wirft. Wir wollen nun einige numerische Berechnungen analog zu [Osw04] durchführen.

Anmerkung: Die Rechnung in [Osw04] ist nicht korrekt, da in der Rechnung statt dem Radius r der Kugel, der Durchmesser $2r$ verwendet wurde. Dadurch vervierfacht sich der Querschnitt der Kugel, was letztlich zu einem falschen Ergebnis führt. Dennoch ist die Quelle aufgrund der ansonsten korrekten Vorgehensweise nützlich.

2.3.3 Numerische Berechnung der Wurfweite

Um die numerischen Berechnungen durchzuführen wurde ein Programm in der Programmiersprache C# geschrieben. Das Programm wurde so konstruiert, dass wir über die Benutzeroberfläche alle notwendigen Parameter eingeben können und ein $y(x)$ -Graph, sowie die Wurfweite x'_w ausgegeben wird. Eine detaillierte Beschreibung befindet sich im Anhang. Dabei löst der Algorithmus das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\gamma (\dot{x}(t))^2, \\ \ddot{y}(t) &= -\gamma (\dot{y}(t))^2 - g,\end{aligned}$$

wobei γ ein Vorfaktor ist, welcher sich über $\xi \cdot \rho \cdot A/2m$ berechnet. Zu beachten ist, dass γ uns ebenfalls ein Vorzeichen liefern muss, welches immer entgegen der Geschwindigkeitsrichtung anliegt. Die Anfangsbedingungen berechnen wir über

$$\begin{aligned}\dot{x}(t=0) &= v_0 \cos(\alpha), \\ \dot{y}(t=0) &= v_0 \sin(\alpha).\end{aligned}$$

Wir wollen nun unser einfaches Modell mit realistischen Daten vergleichen. In Tabelle 2.3 sind einige Daten von [Bar96] aufgeführt. Diese Werte wurden bei den Olympischen Spielen 1972 in München optisch aufgenommen und ausgewertet. Wir stellen nun den dort aufgenommenen Daten Rechnungen aus unserem einfachen Modell gegenüber. Die Messfehler in den Parametern, also der Abwurfhöhe h , dem Abwurfwinkel α und der Abwurfgeschwindigkeit v_0 , wurden nicht angegeben. Dennoch ist die Tabelle geeignet um einen groben Vergleich durchzuführen.

Name	v_0 [m/s]	h [m]	α [°]	x_{exp} [m]	x'_w [m]	Δx [m]
Woods	13,9	2,2	40	21,17	21,61	-0,44
Woods	13,7	2,1	35,7	21,05	20,58	+0,47
Woods	13,6	2,16	37,7	20,88	20,59	+0,29
Briesenick	14	2,2	39,7	21,02	21,87	-0,85
Feuerbach	13,5	2,1	38,3	21,01	20,32	+0,69

Tabelle 2.3: Zusammenstellung einiger Daten bei den Olympischen Spielen 1972 nach [Bar96]

Man kann erkennen, dass unsere Rechnungen relativ genaue Resultate liefern. Berechnen wir die Standardabweichung der Daten aus Tabelle 2.3 von unseren Berechnungen, so

stellen wir fest, dass der mittlere Fehler im Bereich von 2% liegt. Einige Berechnungen weichen stark vom theoretischen Wert ab, weshalb sich uns die Frage nach der Größe des Messfehlers stellt. Beispielhaft wollen wir die gemessenen Daten des Athleten „Briesenick“ berechnen. Um die Zahl der Variationsparameter einzuschränken, wurde angenommen, dass es sich um Windstille $v_{w,h} = 0$ gehandelt hat. Des Weiteren setzen für die Abwurfhöhe (von Briesenick) h die Form von Gleichung 2.10 ein, wobei wir h_s durch $h_{\text{Körper}} - 0,3$ m und l durch $h_{\text{Körper}}/2 - 0,1$ m abschätzen. Für $h_{\text{Körper}}$ setzen wir 1,91 m ein. Als Variationsparameter bleiben demnach nur noch v_0 und α übrig. Um damit auf x_{exp} zu gelangen müssen v_0 und α die Werte aus Tab. 2.4 annehmen.

v_0 [m/s]	13,7	13,8	13,9	14
α [°]	39,3	36,2	34,4	32,8

Tabelle 2.4: Variation zum Finden der korrekten Parameter für den x_{exp} -Wert von Briesenick aus Tab. 2.3

Wie wir erkennen können, kann bereits ein Fehler von 0,3 m/s in der Messung von v_0 die Abweichung erklären. Ein Fehler in der Messung des Abwurfwinkels α von $5,3^\circ$ liefert ebenfalls eine Erklärung für die Abweichung. Ein Fehler bei der Winkelmessung ist nicht unwahrscheinlich, da hier sehr leicht Messfehler gemacht werden können (zweidimensionale Messung bei einem dreidimensionalen Problem).

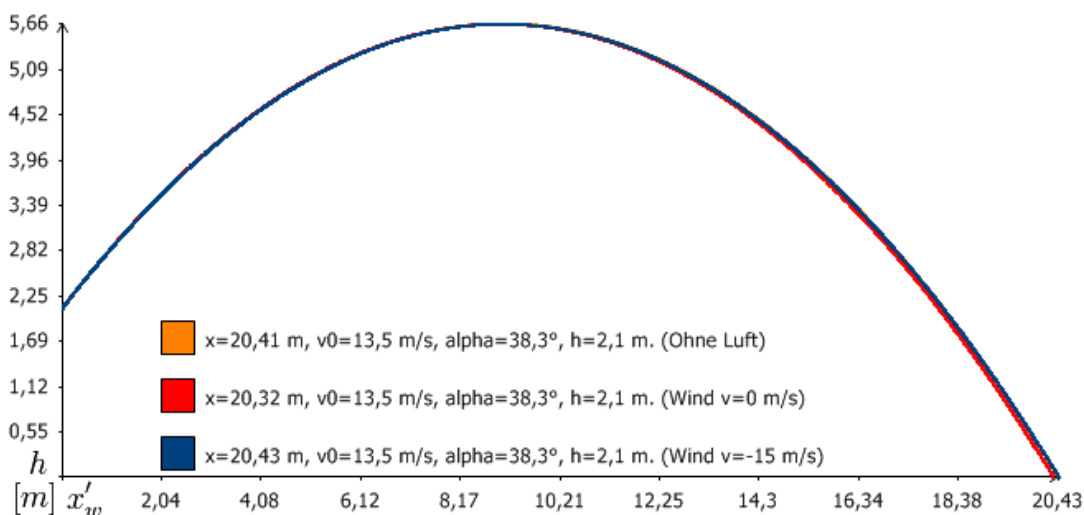


Abbildung 2.10: Numerische Auswertungen bei Daten von Feuerbach ohne Luftreibung (orange) und mit Luftwiderstand (rot: $v_{w,h} = 0$, blau: $v_{w,h} = 15$ m/s Rückwind)

Ebenfalls stark betroffen sind die Daten des Athleten „Feuerbach“. Allein mit Winddruck (in diesem Fall Rückenwind) wäre diese starke Abweichungen nicht zu erklären wie Abbildung 2.10 zeigt. Selbst bei starkem Rückenwind der Windstärke 7 (≈ 50 km/h) würde die Kugel nach unseren Berechnungen nicht an die experimentell gemessene Wurfweite heranreichen, weshalb die Vermutung nahe liegt, dass dies an den Messfehlern liegt.

2.3.4 Verifikation der Ergebnisse

Bereits [Tut76] hat Untersuchungen bzgl. des Wurfverhaltens von Kugeln im für uns interessanten Bereich, also bei Abfluggeschwindigkeiten von 12–14 m/s, bei einem Winkel α von $\pi/4$ und einer Abwurfhöhe h von 2 m, durchgeführt. Er kam dabei zu folgendem Ergebnis:

- Bei *Gegenwind* von $v_{\text{Wind}} = 5$ m/s:
 - Die untere Grenze ($v_0 = 12$ m/s) liegt bei 9 cm weniger gegenüber Windstille.
 - Die obere Grenze ($v_0 = 14$ m/s) liegt bei 14 cm weniger gegenüber Windstille.
- Bei *Rückenwind* von $v_{\text{Wind}} = 5$ m/s:
 - Die untere Grenze ($v_0 = 12$ m/s) liegt bei 6 cm mehr gegenüber Windstille.
 - Die obere Grenze ($v_0 = 14$ m/s) liegt bei 8 cm mehr gegenüber Windstille.

	$v_{w,h}$ [m/s]	1	2	3	4	5
Gegenwind	Δx [cm]	-1	-3	-6	-8	-11
Rückenwind	Δx [cm]	2	4	5	6	7

Tabelle 2.5: Einfluss der horizontalen Windgeschwindigkeit auf die Wurfweite bei $v_0 = 13$ m/s, $\alpha = 45^\circ$ und $h = 2$ m gegenüber Windstille

Diese Rechnungen konnten mit unserem Programm verifiziert werden, wie Abbildung 2.11 und Tabelle 2.5 zeigen. Dies bestätigt, dass die Flugweite der Kugel durch Windgeschwindigkeiten bis zu 5 m/s nur geringfügig beeinflusst wird.

Zusätzlich zu der Betrachtung von [Tut76] können wir mit unserem Programm die Auswirkungen von vertikalen Windgeschwindigkeiten simulieren. In diesem Fall gibt es nur eine sinnvolle Richtung, welche von oben nach unten, d.h. entgegengesetzt zur vertikalen Wurfrichtung, verläuft. In Tabelle 2.6 sind die erhaltenen Daten aufgezeigt. Wir können

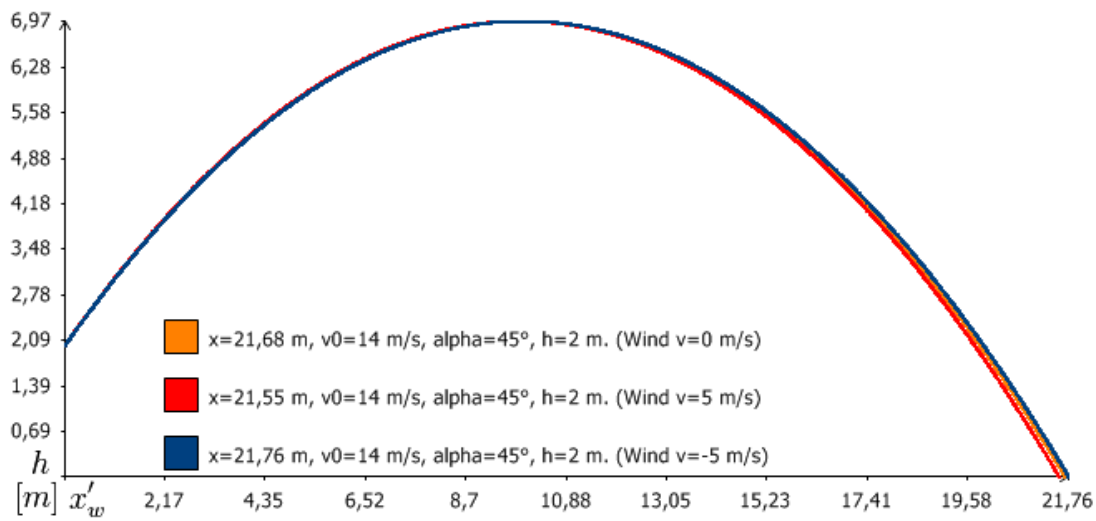


Abbildung 2.11: Verifikation der Rechnung von [Tut76] mit Hilfe unseres Computerprogramms

dabei erkennen, dass der Wind in vertikaler Richtung keinen so großen Einfluss auf die Wurfweite ausübt, wie in horizontaler Richtung.

	$v_{w,v}$ [m/s]	1	2	3	4	5
Von oben	Δx [cm]	0	-1	-2	-3	-4

Tabelle 2.6: Einfluss der vertikalen Windgeschwindigkeit auf die Wurfweite bei $v_0 = 13$ m/s, $\alpha = 45^\circ$ und $h = 2$ m gegenüber Windstille

Des Weiteren können wir mit unserem Programm zeigen, dass die Rechnung in [Osw04] nur mit einem falschen Faktor durchgeführt wurde. So erhalten wir durch Setzen des Kugelradius auf 12 cm (Kugeldurchmesser) in unserem Programm ebenfalls eine Korrektur zur Vakuumlösung (luftleerer Raum) von $\Delta x \approx 60$ cm bei den Parametern $v_0 = 15$ m/s, $\alpha = 45^\circ$, $h = 2$ m und Windstille.

2.4 Konsequenzen der Betrachtung

In diesem Abschnitt konnten wir die genaue Wurfphysik nachrechnen. Wir haben festgestellt, dass der Luftwiderstand beim Kugelstoßen vernachlässigbar klein ist (massive Eisenkugel) und die Rechnungen in der Realität eine sehr gute Abschätzung bieten. Die

Größe des Athleten spielt eine zentrale Rolle zum Erreichen einer maximalen Wurfweite. Dies zeigt sich auch in Tabelle 2.7.

Weite [m]	Athlet	Körperhöhe [cm]	Masse [kg]
23,12	Randy Barnes	193	137
23,06	Ulf Timmermann	195	118
22,91	Alessandro Andrei	191	118
22,64	Udo Beyer	194	130
22,00	Alexander Baryschnikow	198	130
21,82	Al Feuerbach	186	120
21,78	Randy Matson	203	117
21,51	Tomasz Majewski	204	132
21,16	Jurij Bilonoh	200	135
20,06	Bill Nieder	190	102

Tabelle 2.7: Athleten mit Körperhöhe, Masse und deren Rekordweiten nach [Wikib]

Man kann gut erkennen, dass Kugelstoßer generell sehr groß sind, was die Abhängigkeit der Höhe¹ von der maximalen Wurfweite unterstreicht, und die Bevorzugung größerer Athleten für diesen Sport erklärt.

Außerdem konnten wir feststellen, dass es durchaus sinnvoll sein kann einen besseren Abwurfwinkel α einer schnelleren Geschwindigkeit v_0 zu opfern. Wir konnten herausfinden, dass sich der optimale Abwurfwinkel verschiebt, je nachdem wie die Kraft vom Abwurfwinkel abhängt. Dadurch können wir den optimalen Abwurfwinkel nur als Richtlinie betrachten und uns primär der Optimierung der Abwurfgeschwindigkeit widmen.

Insgesamt haben wir somit auch schon einen Einblick in notwendige Kriterien für eine gute Technik erhalten. Die Abhängigkeit der Masse ist interessant und wird im nächsten Abschnitt, zusammen mit der Frage wie ein Athlet die Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Kugel beeinflussen kann, diskutiert.

¹In der Tabelle wurde die Körperhöhe angegeben. Die Abwurfhöhe erhält man über die Schulterhöhe und dem Sinus vom Abwurfwinkel mal der Armlänge des Athleten, also $h = h_s + l \cdot \sin(\alpha)$, berechnen.

3 Diskussion einiger Wurftechniken

Im Gegensatz zur physikalischen Diskussion der Wurfbahn müssen wir bei der physikalischen Modellierung der Wurftechniken Näherungen anwenden, welche spekulativ und schwer überprüfbar sind. Wir werden feststellen, dass wir einen Freiheitsgrad in unserer Rechnung erhalten, welcher es uns ermöglicht eine breite Spanne von Ergebnissen zu erhalten.

Dies ist der Grund, wieso das vorliegende Kapitel höchstens als Richtlinie bzw. Spekulation anzusehen ist, und weit von der Realität abweichen kann. Wir werden im Grund versuchen, uns nur auf die Hauptmerkmale der zu untersuchenden Techniken zu konzentrieren um damit die Hauptunterschiede zwischen den Techniken einsehen zu können.

Wir werden uns im Folgenden auf drei Techniken konzentrieren:

1. *Den Standstoß*. Dieser ist das Grundgerüst für unsere Rechnungen. Wir erwarten, dass der reine Standstoß ein schlechteres Ergebnis liefert als moderne Techniken, da diese im Prinzip den Standstoß um ein besseres Grundgerüst ergänzen.
2. *Der Drehstoß*. Diese Technik ist koordinativ sehr anspruchsvoll für den Athleten und bietet den Vorteil, dass sie sehr ähnlich zur Standardtechnik beim Diskuswurf ist. Wir erwarten, dass der Drehstoß eher für mittelgroße, aber schwere Athleten geeignet ist.
3. *Die O'Brien-Technik*. Diese Technik kann als Standardtechnik beim professionellen Kugelstoßen bezeichnet werden. Wir erwarten, dass diese Technik für mittelschwere, aber große Sportler geeignet ist.

In der Zusammenfassung von [Lic78] wurde bereits versucht, eine mögliche Formel für die erreichbare Endgeschwindigkeit anzugeben. Wir werden sehen, dass unser Resultat für den Standstoß der Logik von [Lic78] folgt und dabei noch weitere Merkmale beinhaltet.

3.1 Der Standstoß

3.1.1 Vorüberlegungen

Der Standstoß ist die technisch einfachste Wurftechnik beim Kugelstoßen. Der Ablauf des Standstoßes ist in Abbildung 3.1 gezeigt. In der mathematischen Modellierung können wir diesen Stoß auf folgende Merkmale reduzieren:

- Auf den Höhenunterschied Δh (durch Strecken des Armes und Dehnung des Körpers),
- den Positionsunterschied Δx (durch die Vierteldrehung und Dehnung des Körpers),
- die Zeit Δt , welche notwendig ist um diese Unterschiede zu durchlaufen und von der zur Verfügung stehenden Muskelkraft des Athleten abhängt, und
- die Vierteldrehung des Körpers zusammen mit der damit gewonnen Körpergeschwindigkeit.

Dabei wird Δh , Δx und Δt immer zwischen der Ausgangsposition des Athleten und der Endposition, in welcher die Kugel die Hand des Athleten verlässt, gemessen.

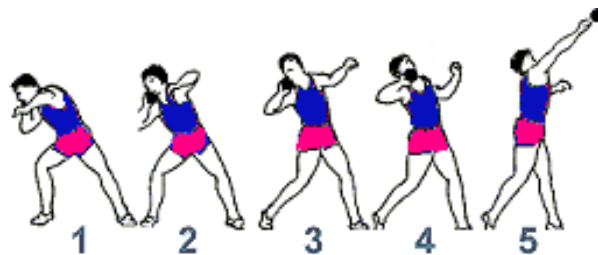


Abbildung 3.1: Ablauf eines Standstoßes beim Kugelstoßen von [Spo]

Wir können die Technik in zwei wesentliche Phasen einteilen:

1. Vorbereitungsphase (Schritt 1-4): Hier vollzieht der Körper eine Vierteldrehung und nimmt bereits ein wenig Geschwindigkeit auf, welche dann auf die Kugel übertragen werden soll. Ziel ist es, die anschließend notwendige Muskelkraft zu verringern und damit die Hauptphase zu unterstützen. Für die Drehung ist eine größere Körpermasse von Vorteil. Dies bestätigt die Daten aus Tabelle 2.7.
2. Hauptphase (Schritt 5): Hier wird die Kugel durch die Muskelkraft der Arme beschleunigt. Es gilt zu beachten, dass nie die maximal mögliche Muskelkraft, also die

Muskelkraft, welche man im Arm maximal messen könnte, F_{\max} genannt, ausgenutzt werden kann. Drei entscheidende Gründe hierfür sind:

- Die Muskelkraft ist, wie in unserem Muskulaturmodell bereits erwähnt, richtungsselektiv. Ein Athlet hat somit im Allgemeinen bei $\alpha = 0^\circ$ eine höhere Kraft als bei $\alpha > 0^\circ$.
- Die Muskelkraft hängt stark davon ab, ob der Muskel gedehnt oder gestaucht ist. Daher wird im Mittel mit einer Muskelkraft \bar{F} beschleunigt, für die $\bar{F} < F_{\max}$ gilt.
- Die Kugel ist als Gegengewicht zu leicht um F_{\max} zu erreichen. Dies wurde durch zahlreiche Messungen wie etwa in [Sch94, Seite 375] belegt.

Wir werden davon ausgehen, dass die beiden Phasen physikalisch gesehen getrennt voneinander betrachtet werden können. Rein sporttechnisch ist die Vorbereitungsphase nicht von der Hauptphase zu trennen, da diese bereits für einen flüssigen und leichten Übergang verantwortlich ist. Wir setzen hierbei als Näherung an, dass der Anteil der Vorbereitungsphase, welcher direkt die Hauptphase beeinflusst (energietechnisch gesehen) sehr klein ist, weshalb wir ihn vernachlässigen können.

3.1.2 Die Vorbereitungsphase

Beginnen wir mit der Modellierung der Vorbereitungsphase. Hierfür können wir anfangs über ein einfaches Energieerhaltungsmodell der Form

$$\frac{1}{2}(m + m_{\text{Arm}})v_V^2 \stackrel{!}{=} \sigma (E_{\text{rot,Körper}} + E_{\text{trans,Körper}})$$

arbeiten, wobei M die Körpermasse des Athleten, m die Masse der Kugel, m_{Arm} die Masse des Arms und $E_{\text{rot,Körper}}$, sowie $E_{\text{trans,Körper}}$, die entsprechende Rotations- bzw. Translationsenergie des Körpers (inkl. Kugel) und v_V die (hypothetische) Geschwindigkeit am Ende der Vorbereitungsphase der Kugel bezeichnet.

Mit σ , $\sigma \in [0, 1]$, führen wir einen dimensionslosen Parameter ein, den wir dazu verwenden werden, unsere Ergebnisse an Referenzwerte anzupassen. In diesem Modell ist σ nur dann 1, wenn es sich um eine totale Energieumwandlung handelt. Da der Körper nach dem Wurf nicht in Ruhe ist, sondern erst abgebremst werden muss, müssen wir diesen Parameter einführen.

Wir können nun an unserem einfachen Modell mit Hilfe der Vierteldrehung weiterarbeiten. Uns ist bekannt, dass bei Drehungen

$$v = \omega r, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

gilt. Dabei ist r der Radius des geschlossenen Drehkreises und ω die Winkelgeschwindigkeit. Um den Drehimpuls $I\omega$ des Körpers in der Drehung zu berechnen, müssen wir diesen nähern. Wir nähern den Körper dabei als Zylinder mit Höhe h (gleich der Körperhöhe h) und Zylinderradius r . Eine Berechnung des Zylinderradius eines Athleten könnte durch Näherung einer homogenen Dichte, z.B. mit der Dichte von Wasser, $\varrho = 1000 \text{ kg/m}^3$, in Form von

$$M = \pi r^2 h \varrho \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{M}{\pi h \varrho}}, \quad (3.1)$$

vorgenommen werden. Dadurch erhalten wir als Trägheitsmoment um die bevorzugte Drehachse des Zylinders mit Hilfe des Steiner'schen Satzes (mit der Kugel als punktförmigen Masse im Abstand r zur Drehachse)

$$I = \left(\frac{1}{2} M + m \right) \cdot r^2, \quad (3.2)$$

wobei M die Körpermasse und m die Kugelmasse darstellt. Nachdem wir davon ausgehen, dass beim Standstoß keine Translation stattfindet, bzw. diese vernachlässigbar klein ist, gelangen wir zu

$$E_V = \frac{1}{2} (m + m_{\text{Arm}}) v_V^2 \stackrel{!}{=} \sigma \frac{I}{2} \omega^2 \approx \sigma \left(\frac{1}{2} M + m \right) \frac{\Delta\varphi^2}{\Delta t^2} r^2.$$

Auflösen nach v_V und Einsetzen von $\Delta\varphi = \pi/2$ ergibt nun

$$v_V = \sqrt{\sigma \frac{1}{2} \frac{M + 2m}{m + m_{\text{Arm}}} \frac{\pi r}{2t_V}}. \quad (3.3)$$

3.1.3 Die Hauptphase

Die Geschwindigkeit der Vorbereitungsphase wird nun mit in die Hauptphase genommen. In der Hauptphase kommt die meiste Kraft F aus dem Arm heraus, welcher die Kugel nun von der Geschwindigkeit nach der Vorbereitungsphase v_V auf die Abwurfgeschwindigkeit

v_0 beschleunigen muss. Dabei spielen für uns neben der Kraft zwei weitere Größen eine entscheidende Rolle:

- Die Armlänge l , da diese den Weg, welche die Kugel zurücklegen kann, bestimmt (je länger desto besser).
- Der Abwurfwinkel α . Je höher α ist desto geringer ist die zur Verfügung stehende Kraft F_{eff} .

Über Betrachtung der kinetischen Energie,

$$E_H = \frac{1}{2} [m + m_{\text{Arm}}] \cdot v_H^2 \stackrel{!}{=} \int_{s_0}^s F \cdot ds',$$

gelangen wir mit Hilfe der Rechnungen und Ergebnisse aus [Bra05, Seiten 42-43] schließlich auf

$$v_H = \sqrt{\frac{2 \int_{s(t_V)}^{s(t)} F \cdot ds'}{m + m_{\text{Arm}}}}. \quad (3.4)$$

Unser Ziel ist das Erhalten einer Gleichung um v_0 gezielt bestimmten zu können. Wir verwenden dazu, dass wir beide Systeme (Vorbereitungsphase und Hauptphase) getrennt voneinander betrachten können, weshalb wir als Ansatz

$$E_{\text{gesamt,Kugel}} = E_V + E_H$$

erhalten. Somit gelangen wir rasch auf

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (v_H^2 + v_V^2) + M v_V^2 + m_{\text{Arm}} v_H^2.$$

Wenn wir dies nach v_0 auflösen ergibt sich

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{M}{m} + 1\right) v_V^2 + \left(\frac{m_{\text{Arm}} + m}{m}\right) v_H^2} \approx \sqrt{\frac{M}{m} v_V^2 + \left(\frac{m_{\text{Arm}} + m}{m}\right) v_H^2}, \quad (3.5)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $M \gg m$ ist.

3.1.4 Zusammenführen der Ergebnisse und Beispielrechnungen

Setzen wir die Ergebnisse der Gleichungen 3.3 und 3.4 zusammen in 3.5 ein, so erhalten wir

$$v_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{8} \frac{M^2 + 2Mm}{m^2 + m_{\text{Arm}}m} \frac{\pi^2 r^2}{t_V^2} + \frac{2F\Delta s}{m}}. \quad (3.6)$$

Wir können nun noch einige Näherungen an dieser Gleichung vornehmen und Δs bestimmen. Durch eine grobe Abschätzung von $m^2/M \approx 1/2$ kg und $m_{\text{Arm}}m/M \approx 1/4$ kg erhalten wir $3/4$ kg im Nenner des 1. Summanden in der Wurzel. Wir setzen noch r aus Gleichung 3.1 ein, weshalb wir letztendlich auf

$$v_0 \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\tau} \frac{M^2 + 2Mm}{hgt_V^2} + \frac{2F\Delta s}{m}}, \quad \tau = 1 \text{ kg}$$

gelangen. Für Δs können wir $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta h^2}$ verwenden, was beim Standstoß in etwa gleich l ist. Somit erhalten wir schließlich

$$v_0 \approx \sqrt{\sigma \frac{M^2 + 2Mm}{2\tau hgt_V^2} + 2l \frac{F}{m}}. \quad (3.7)$$

Wir werden diese Gleichung nun anhand einiger Beispieldaten diskutieren. Dafür sind jedoch noch einige Parameter zu bestimmen.

- Für σ wählen wir beim Standstoß 0,7. Dieser Wert sollte für eine erste grobe Abschätzung im realistischen Bereich liegen. Der Wert ist definitiv kleiner als 1 (Dissipation) und größer als $1/2$ (keine große Geschwindigkeit, geringer Übertrag).
- Wir benötigen noch Kenntnisse über die *durchschnittliche* Kraft im Arm. Eine mögliche Abschätzung bietet sich durch ein Federmodell der Form $F = k \cdot \Delta x$, wobei k die Kraftkonstante des Armes ist. Durchschnittlich können wir lt. [Wika] etwa 500 N/m annehmen, was bei einer Armlänge von 0,8 m einer Kraft von 400 N entspricht. Für professionelle Kugelstoßer können wir die durchschnittliche Kraft über die Analyse von professionellen Bankdrückern wie in [Ell89] inkl. unserem Vorwissen (geringere Kraft, da $\alpha > 0^\circ$ und Widerstand zu gering) abschätzen. Wir erhalten in etwa 1400 N für volle Last bei $\alpha = 0^\circ$. Durch den geringen Widerstand reduziert sich dieser Wert in etwa auf die Hälfte. Davon ziehen wir wiederum $1/7$ ab, da wir in etwa bei 40° werfen. Insgesamt kommen wir somit auf $F \approx 600$ N.

- Für die Masse des Armes können wir laut [Cla69, Seite 45] ein durchschnittliches Gewicht von 3,35 kg annehmen. Professionelle Kugelstoßer werden bei der Armmasse (wegen ihrer Körpergröße und Körpermasse) auf einen deutlich höheren Betrag kommen. Eine grobe Abschätzung liefert uns [Wil89, Seite 33], wonach $m_{\text{Arm}} \approx M/20$ ist.
- Als letztes benötigen wir eine grobe Abschätzung der Durchführungszeit. Als Grundlage hierfür verwenden wir die Aussage von [Bau98, Seite 289], dass Leistungssportler eine Strecke von 30 m in einem Zeitraum von 3 bis 4 Sekunden (je nach Start- und Sportart) bewältigen können. Diese Schnelligkeitsfähigkeit benutzen wir um die Beschleunigungskraft, die in den Beinen steckt, auszurechnen. Durch eine Abschätzung erhalten wir letztlich eine Zeit zwischen 0,5 s bis 1 s.

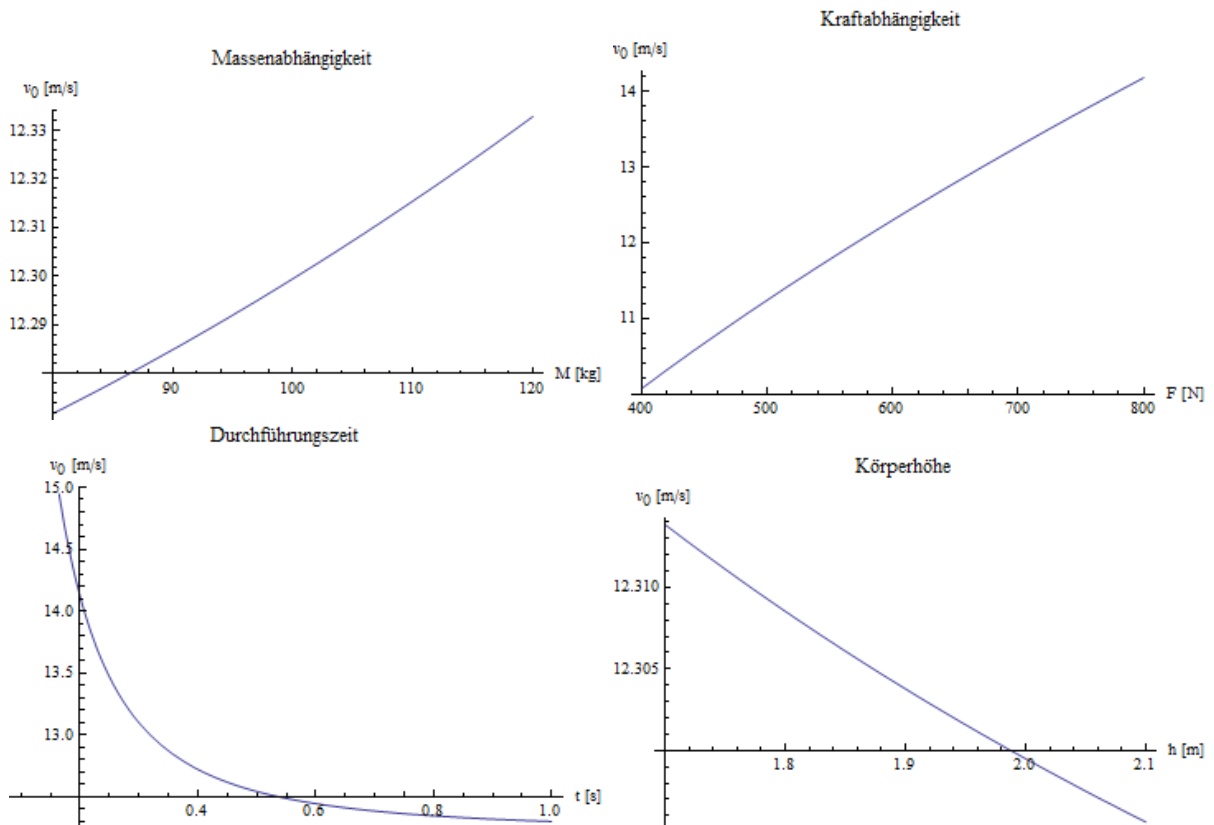


Abbildung 3.2: Abhängigkeit der Abwurfgeschwindigkeit beim Standstoß für die Parameter $\sigma = 0,7$, $m = 7,235$ kg, $h = 2$ m, $M = 100$ kg, $t = 1$ s, $F = 600$ N und $l = 0,9$ m unter Variation der im Plot stehenden Variable

In Abbildung 3.2 sind die einzelnen Abhängigkeiten demonstriert. Dabei stellen wir fest,

dass sich die Massenabhängigkeit nur schwach bemerkbar macht. Auch die Höhenabhängigkeit wurde näher untersucht. In dem für uns interessanten Bereich (1,8 bis 2,2 m) ist die Abhängigkeit ebenfalls sehr gering. Wir erwarten, dass Stoßtechniken, die im professionellen Bereich eingesetzt werden, eine wesentlich stärkere Abhängigkeit von Körpermasse und Körperhöhe besitzen.

Körpermasse [kg]	Höhe h [cm]	Armlänge [cm]	F [N]	v_0 [m/s]	Weite x'_w [m]
100	180	80	600	11,89	16,28
100	200	80	600	11,86	16,88
100	200	90	600	12,54	18,13
130	180	80	600	12,14	16,88
130	200	80	600	12,07	16,90
130	200	90	600	12,75	18,67

Tabelle 3.1: Beispielrechnungen zur Standstoßtechnik mit $\sigma = 0,7$, $t = 0,5$ s bei einem Abwurfwinkel α von 40° und einer Abwurfhöhe von $h_s + l \sin(40^\circ)$ mit $h_s = h - 0,3$ m

In Tabelle 3.1 wurden einige Beispielrechnungen mit der Gleichung 3.7 durchgeführt. Zu beachten ist, dass alle Berechnungen nur grobe Richtlinien darstellen und immer einen Maximalwert liefern. Wir erkennen allerdings, dass die reine Standstoßtechnik keinen Vorteil für große Körpermasse oder Körperhöhe bietet. Wir werden nun fortgeschrittenere Techniken untersuchen, welche darauf abzielen Vorteile aus der Körperstruktur zu ziehen.

3.2 Drehstoßtechnik

3.2.1 Vorüberlegungen

Bei dieser Technik kommt zusätzlich zur Bewegung des Armes eine Rotation des Körpers hinzu. Sie ist wesentlich komplexer als die Standstoßtechnik, bietet dem Athleten dafür aber eine gute Möglichkeit seinen Körper (v.a. seine Masse) geschickt zur Energieumwandlung einzusetzen. Zunächst vollzieht der Athlet dabei eine Drehung um 360° , wobei er sich zum einen leicht nach vorne bewegt und zum anderen von einer normalen Körperhaltung in eine geduckte Körperhaltung dreht. Die Kugel bleibt immer nahe am Körper. Abbildung 3.3 zeigt den ersten Teil des Bewegungsablaufes.

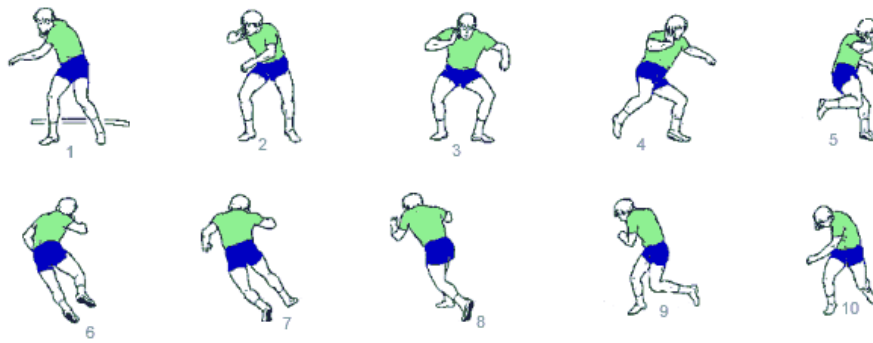


Abbildung 3.3: Ablauf eines Drehstoßes beim Kugelstoßen - Aufbau der Rotationsenergie, Original von [Bau98, Seite 310] und eingefärbt von [Spo]

Im zweiten Teil vollzieht der Athlet eine sehr schnelle Drehung um 180° , wobei er einer geduckten Körperhaltung in eine gestreckte übergeht. Dabei nutzt der Athlet seinen Arm um die Kugel in den richtigen Winkel herauszuschleudern und um die Abwurfhöhe zu maximieren. Abbildung 3.4 zeigt den zweiten Teil des Bewegungsablaufes.

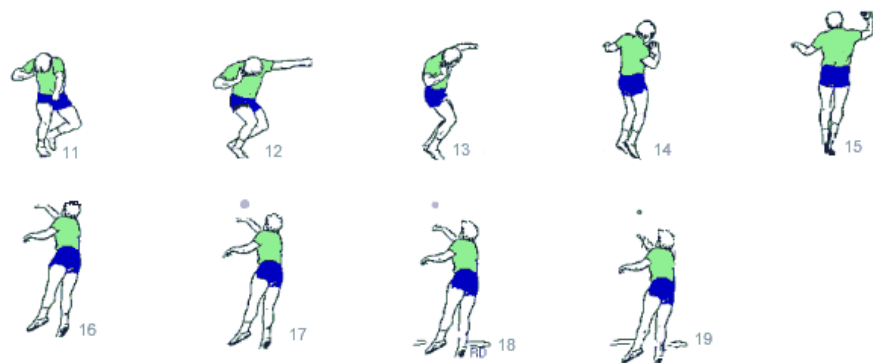


Abbildung 3.4: Ablauf eines Drehstoßes beim Kugelstoßen - Umsetzen der Energie, Original von [Bau98, Seite 310] und eingefärbt von [Spo]

Um das Rotationsproblem zu modellieren werden wir nun einige Näherungen verwenden.

- Der Körper des Athleten wird erneut als Zylinder genähert. Dadurch erhalten wir als Trägheitsmoment um die bevorzugte Drehachse des Zylinders Gleichung 3.2, genau wie beim Standstoß.
- Für die Kraft des Arms verwenden wir das Ergebnis unserer Rechnungen beim Standstoß.

3.2.2 Die Vorbereitungsphase

Für v_V rechnen wir über die Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}(m + m_{\text{Arm}})v_V^2 = \sigma \left[\frac{1}{2}(M + m)v_{\text{Körper}}^2 + \frac{I}{2}\omega^2 \right],$$

wobei wir wieder unseren dimensionslosen Parameter σ einführen, über den wir Übertragungsverluste einfließen lassen werden. Auflösen nach v_V liefert uns

$$v_V^2 = \sigma \left(\frac{M + m}{m + m_{\text{Arm}}}v_{\text{Körper}}^2 + \frac{I}{m + m_{\text{Arm}}}\omega^2 \right).$$

Wir betrachten nun die beiden Summanden in der Wurzel getrennt voneinander. Für den ersten Summanden folgt über $v_{\text{Körper}} = S/t_V$, wobei S die Strecke der Translation ist, dass

$$\frac{M + m}{m + m_{\text{Arm}}}v_{\text{Körper}}^2 = \frac{M + m}{m + m_{\text{Arm}}}\frac{S^2}{t_V^2}.$$

Für den zweiten Summanden erhalten wir über die Überlegung, dass $\omega = \Delta\varphi/\Delta t \approx 5\pi/t_V$ ist, sowie I aus 3.2 mit r aus 3.1, dass

$$\frac{I}{m + m_{\text{Arm}}}\omega^2 = \frac{25}{h\rho} \frac{\pi}{t_V^2} \frac{\frac{1}{2}M^2 + Mm}{m + m_{\text{Arm}}}.$$

Nun müssen wir einen Ausdruck für S finden, wobei uns Abbildung 3.5 helfen wird. Dort ist der Weg des Athleten beim Drehstoß gezeigt. Uns interessiert die Länge der Wegstrecke ab der ganzen Umdrehung.

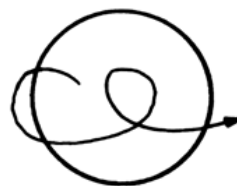


Abbildung 3.5: Weg beim Drehstoß aus der Vogelperspektive

Der Kreis, welcher den Bewegungsspielraum des Athleten zur Ausführung der Abwurftechnik darstellt, hat einen Durchmesser von 2,135 m. Somit bietet sich für die Translation ein Wert von $S = 2$ m an. Insgesamt erhalten wir damit

$$v_V = \sqrt{\sigma \frac{1}{t_V^2(m + m_{\text{Arm}})} \left[(M + m)S^2 + \frac{25\pi}{\rho h}(M^2 + 2Mm) \right]}. \quad (3.8)$$

3.2.3 Die Hauptphase

Hier können wir das Ergebnis vom Standstoß, Gleichung 3.4, verwenden. Die Kopplung der zwei Systeme ist beim Drehstoß sicherlich größer, weshalb auch der Energieabzug bei v_H größer ist, als beim Standstoß. Es wäre daher sinnvoll, v_H über einen Parameter, analog zum σ in der Vorbereitungsphase, an v_V anzukoppeln. Wir werden dies jedoch nicht tun, und statt dessen σ entsprechend anpassen.

Somit kommen wir direkt zu

$$v_0 = \left(\sigma \frac{M}{t_V^2 m(m + m_{\text{Arm}})} \left[(M + m)S^2 + \frac{25\pi}{\rho h}(M^2 + 2Mm) \right] + 2l \frac{F}{m} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

Wir können sofort einige Aussagen zu dieser Technik treffen. Zum einen sehen wir, dass allein schon aufgrund des größeren Kugelweges (aufgrund der Translation), die Hauptphase einen besseren Wert liefert. Zum anderen sehen wir, dass bei dieser Technik der kleinere von zwei ansonsten identischen Sportlern (gleiche Kraftkonstante, Armlänge, Masse, Beschleunigung) klar im Vorteil. Beim Standstoß war die Abhängigkeit von der Körperhöhe noch relativ gering - hier ist sie deutlich besser.

3.2.4 Ergebnisse und Beispielrechnungen

Wir wollen nun, wie bereits bei der Standstoßtechnik, Beispielrechnungen vornehmen. Dazu können wir alle Parameter wie beim Standstoß verwenden, mit Ausnahme von:

- Die Übertragungskonstante ist beim Drehstoß deutlich geringer als beim Standstoß. Dies sieht man bei echten Wettkämpfen ebenfalls, da die Athleten nach dem Drehstoß noch sehr viel Schwung besitzen. Wir wählen $\sigma = 0,15$.
- Die Zeit um den Drehstoß auszuführen ist deutlich höher als beim Standstoß. Wir veranschlagen direkt die 3 fache Zeit, weshalb wir auf $t \approx 1,5$ s kommen.
- Für S und m_{Arm} haben wir mit ≈ 2 m und $\approx M/20$ bereits verwendbare Werte hergeleitet.

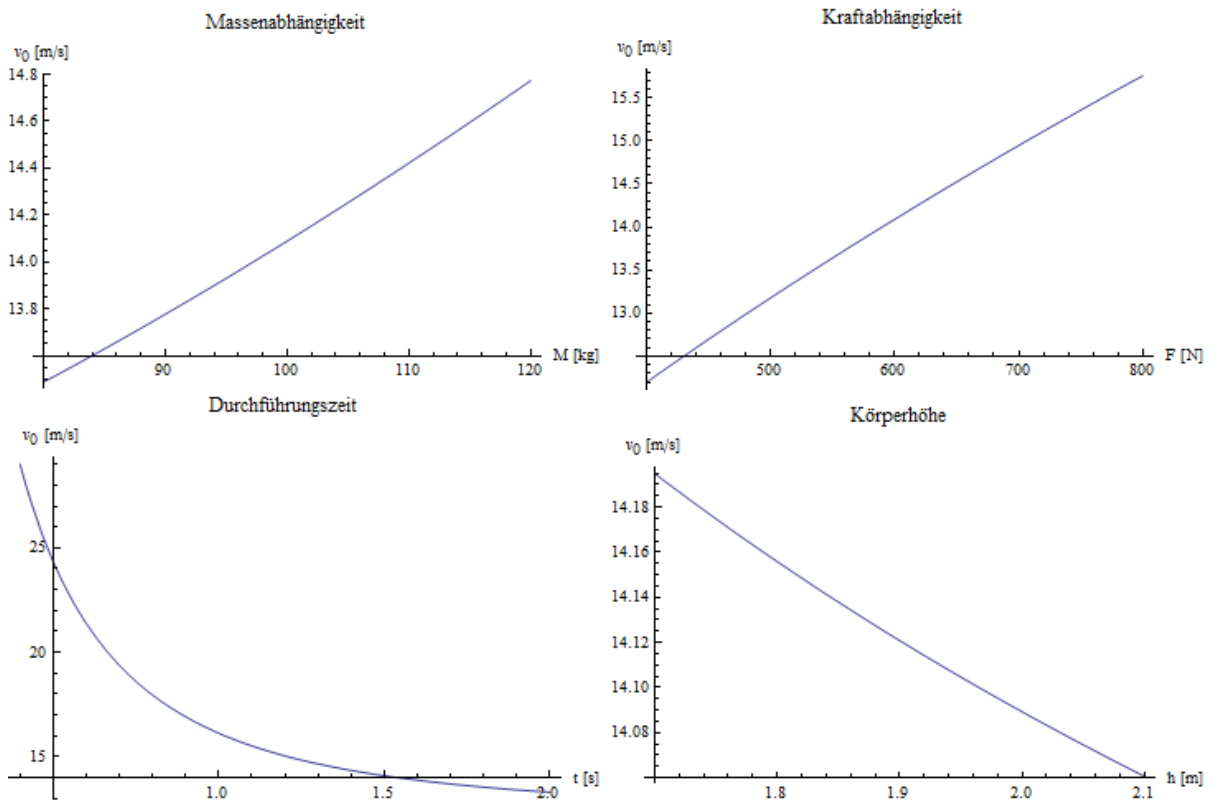


Abbildung 3.6: Abhängigkeit der Abwurfgeschwindigkeit beim Drehstoß für die Parameter $\sigma = 0,15$, $m = 7,235$ kg, $h = 2$ m, $M = 100$ kg, $t = 1,5$ s, $F = 600$ N und $l = 0,9$ m unter Variation der im Plot stehenden Variable

In Abbildung 3.6 ist die Abhängigkeit der Abwurfgeschwindigkeit bei der Drehstoßtechnik von verschiedenen Parametern aufgezeigt. Wir erkennen, dass die Kurven der Abhängigkeiten ganz analog zu denen vom Standstoß, Abbildung 3.2, verlaufen. Folgende Beobachtungen können wir dabei machen:

- Die Massenabhängigkeit ist nun deutlich ausgeprägter. Es ist wirklich nützlich schwerer zu sein. Dies beeinflusst die Abwurfgeschwindigkeit ungemein - und damit die Wurfweite umso mehr.
- Die Kraftabhängigkeit ist nun geringer. Dies bedeutet, dass ein Athlet nun v.a. durch seinen Körperbau und seine Technikbeherrschung an Reichweite gewinnt. Gleichbedeutend damit geht nun auch die Armlänge weniger stark ein.
- Die Technik schneller auszuführen bedeutet deutlich mehr Geschwindigkeitsgewinn als beim Standstoß. Eine Technik unter 0,5 s auszuführen ist schwer - dies ist genau

die Zeit, ab der beim Standstoß nahezu keine Veränderung der Abwurfgeschwindigkeit mehr statt findet. Beim Drehstoß hingegen startet dieser Bereich erst bei ca. 1,2 s. Es ist durchaus möglich den Drehstoß schneller als die gewählten 1,5 s auszuführen, und somit an Abwurfgeschwindigkeit zu gewinnen. Eine Zeit unter 1 s ist nicht möglich, da allein für die reine Translationsstrecke mindestens 1 s aus dem Stand benötigt wird.

- Die Abhängigkeit von der Abwurfhöhe ist nun stärker. Dies macht diese Technik v.a. für kleinere Sportler mit großer Körpermasse attraktiv.

In Tabelle 3.2 sind einige Sportler mit den angenäherten Drehstoßergebnissen und ihren tatsächlichen Bestleistungen aufgeführt. Zu beachten ist dabei, dass sowohl Armlänge, als auch die durchschnittliche Kraft abgeschätzt werden mussten.

Athlet	h [cm]	M [kg]	l [m]	Bestweite [m]	x'_w [m]	v_0 [m/s]
Alexander Baryschnikow	198	130	0,9	22,00	24,12	14,82
Brian Oldfield	196	125	0,9	22,86	23,65	14,66
Arsi Harju	183	125	0,85	21,39	22,90	14,44
Joachim Olsen	184	130	0,87	21,63	23,73	14,73
Randy Barnes	193	137	0,9	23,12	24,89	15,10
Reese Hoffa	182	133	0,85	22,43	23,77	14,74

Tabelle 3.2: Berechnete maximale Wurfweiten einiger Kugelstoßer, welche die Drehstoß Technik verwenden, und deren Bestleistungen mit $\sigma = 0,15$, $t = 1,6$ s, $\alpha = 37^\circ$ bei gleicher Kraft $F = 600$ N

Wir können dabei einsehen, dass die über die Formel berechnete Maximalweite der Athleten immer in etwa 1,5 m über deren Bestwert liegt. Als grobe Abschätzung ist dies mehr als in Ordnung, da wir für alle Athleten den selben durchschnittlichen Kraftwert F verwendet haben, und Armlängen und Durchführungszeiten abschätzen mussten bzw. vereinheitlicht haben. Auch der Parameter σ ist weit davon entfernt exakt zu sein.

Da wir in unserer Formel keinerlei Einschränkungen im Bezug auf geschlechts- oder regelspezifische Details haben, ist es auch möglich die Daten für eine Athletin zu überprüfen. Als Untersuchungsobjekt nehmen wir die bekannte ehemalige deutsche Kugelstoßerin Astrid Kumbernuss. Ihre Parameter sind

$$h = 1,86 \text{ m}, \quad M = 90 \text{ kg}, \quad l = 0,75 \text{ m} \quad \text{und} \quad F = 400 \text{ N}.$$

Dabei wurde σ auf 0,1 - also etwas niedriger als bei den Männern - gesetzt. Der Grund liegt darin, dass aufgrund des geringeren Widerstands auch prozentual mehr Energie im System verloren geht. Berechnungen mit $m_{\text{Kugel}} = 4 \text{ kg}$ (Kugelgewicht Frauen) ergeben

$$v_0 = 14,19 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad x'_w = 22,18 \text{ m.}$$

Dies ist ebenfalls in einem guten Rahmen, da die Bestleistung von Astrid Kumbernuss bei 21,22 m liegt.

3.3 O'Brien-Technik

3.3.1 Vorüberlegungen

Als letzte Technik betrachten wir die sog. O'Brien-Technik (auch Rückenstoß- oder Angleittechnik genannt), bei der sich der Athlet in stark gebeugter Haltung mit dem Rücken zur Stoßrichtung dreht. Anschließend dreht sich der Athlet in einem flüssigen Bewegungsablauf in die gestreckte Abstoßphase, wobei ein Bein während der Halbdrehung zusätzlichen Schwung verleiht. Während des Abstoßes wird das Gewicht auf das Schwungbein verlagert. Die erste Phase ist in Abbildung 3.7 dargestellt.



Abbildung 3.7: Ablauf der O'Brien-Technik beim Kugelstoßen - Maximierung der Anfangskraft von, Original von [Bau98, Seite 298] und eingefärbt von [Spo]

Abgeschlossen wird die Phase analog zum Drehstoß oder Standstoß. Diese Phase ist in Abbildung 3.8 dargestellt.

Das entscheidende Merkmal der O'Brien-Technik ist das, durch die Stellung und Bewegung des Körpers, induzierte Drehmoment. Um dieses geschickt modellieren zu können, müssen wir nach einem bereits berechneten Problem suchen, welches der Problemstellung



Abbildung 3.8: Ablauf der O'Brien-Technik beim Kugelstoßen - Rotation und Verlagerung der Energie des Körpers, Original von [Bau98, Seite 299] und eingefärbt von [Spo]

entspricht. Wir werden im Folgenden versuchen das Problem mit Hilfe des Keltischen Wackelsteins zu lösen. Dafür halten wir uns an die Lösung von [Kuy07, Seiten 577-582].

3.3.2 Der Keltische Wackelstein

Zunächst wollen wir den Keltischen Wackelstein betrachten, um anschließend die entsprechenden Analogien und notwendigen Modifikationen zu erarbeiten. Ein Keltischer Wackelstein ist ein starrer Körper, welcher in etwa die Form eines Ellipsoids bildet. Die Halbachsen (a, b, c) stehen in besonderer Korrelation zueinander. So ist a viel größer als b oder c . Des Weiteren ist die Massenverteilung im Wackelstein nicht homogen, d.h. nicht gleichverteilt. Dies führt dazu, dass in der Ruhelage die zwei horizontalen Hauptträgheitsachsen nicht mit den Halbachsen des Wackelsteins (Ellipsoids) übereinstimmen. Wir wollen den Winkel, welcher die Verschiebung charakterisiert, mit δ bezeichnen.

Das entscheidende Charakteristikum für einen Keltischen Wackelstein besteht darin, dass dieser eine bevorzugte Drehrichtung hat. Dreht sich der Körper nicht in diese Richtung, so fängt der Stein an zu wackeln, bis sich die Drehrichtung entsprechend geändert hat. Für einen Athlet bedeutet dies, dass er durch wenig Kraft (z.B. Verlagerung des Gewichts am hinteren Fuß) ein Drehmoment erzeugt, welches die Drehung in die bevorzugte Drehrichtung verstärken und damit die für den Abwurf zur Verfügung stehende Energie erhöhen kann.

In Abbildung 3.9 ist der Keltische Wackelstein dargestellt. Die Metallzylinder in dieser Abbildung sind in unserem Fall nicht von Bedeutung, da sie nur eingebaut worden sind, um dem homogenen geometrischen Objekt eine inhomogene Massenverteilung zu geben. Diese inhomogene Massenverteilung ist letztendlich der Ursprung des induzierten Dreh-

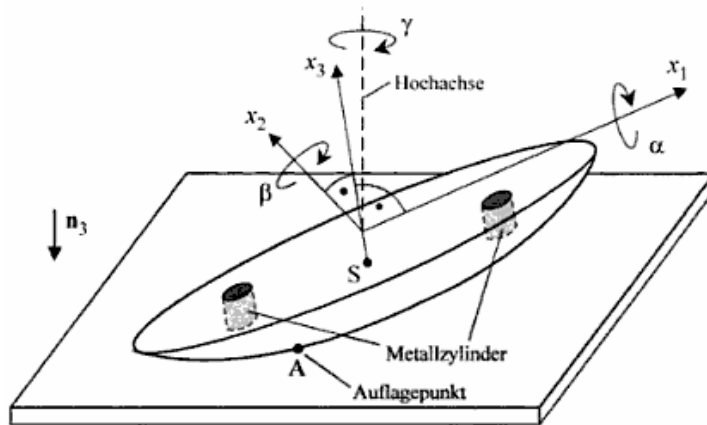


Abbildung 3.9: Veranschaulichung der wichtigsten Parameter beim Keltischen Wackelstein aus [Kuy07, Seite 222]

moments, da sie eine Unwucht verursacht, welche durch Reibung mit der Unterlage für die Wackelbewegung sorgt. Während jeder Schwingung kippt der Wackelstein leicht in Richtung seines Übergewichts, so dass eine Drehung in seine bevorzugte Drehrichtung stattfindet. In unserem Fall ist die inhomogene Massenverteilung ganz natürlich durch den Körper des Athleten und dessen Körperhaltung gegeben.

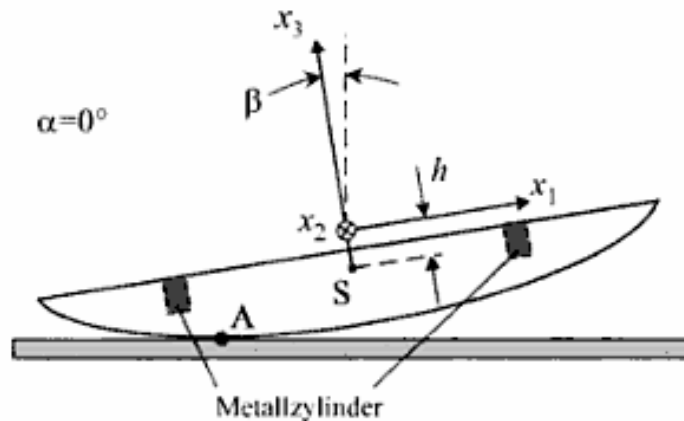


Abbildung 3.10: Querschnitt des Keltischen Wackelsteins aus [Kuy07, Seite 223]

Betrachten wir den Keltischen Wackelstein aus der Seitenperspektive, wie in Abbildung 3.10 dargestellt, so stellen wir fest, dass diese abstrakt gesehen viel gemein hat mit den Athleten bei der O'Brien-Technik (Abbildung 3.7 Schritt 3 und 4). Wir werden nun die wichtigsten Gleichungen aus der Lösung des Keltischen Wackelsteins von [Kuy07] betrachten. Diese Gleichungen werden uns bei der numerischen Berechnung des Keltischen

Wackelsteins mit unseren Parametern helfen.

Prinzipiell gilt es 6 gekoppelte Differentialgleichungen zu lösen. Die Rotation um die *körperfesten* Achsen x_1 , x_2 und x_3 wird dabei beschrieben von

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{-\omega_1 \sin \beta + \omega_3 \cos \beta}{\cos \alpha}, \\ \dot{\alpha} &= \omega_1 \cos \beta + \omega_3 \sin \beta, \\ \dot{\beta} &= (\omega_1 \sin \beta - \omega_3 \cos \beta) \tan \alpha + \omega_2.\end{aligned}$$

Die Winkel ω_1 , ω_2 und ω_3 müssen dabei aus den verbleibenden drei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}A\dot{\omega}_1 - F\dot{\omega}_2 - (B - C)\omega_2\omega_3 + F\omega_1\omega_3 &= N_1 + N_{R1}, \\ B\dot{\omega}_2 - F\dot{\omega}_1 - (C - A)\omega_1\omega_3 - F\omega_2\omega_3 &= N_2 + N_{R2}, \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 + F(\omega_2^2 - \omega_1^2) &= N_3 + N_{R3},\end{aligned}$$

berechnet werden. Hierbei ist

$$\begin{aligned}N_{Ri} &= -c_i\omega_i \quad \text{mit drei Reibungszahlen } c_i \\ \vec{N} &= \vec{r}_{SA} \times \vec{Z}_A, \\ \vec{r}_{SA} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + h \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}, \\ \vec{Z}_A &= \vec{r}_{SA} \times \dot{\vec{\omega}} + \vec{k} - g\vec{\mu}, \quad \vec{k} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{SA} \times \vec{\omega} - \dot{\vec{r}}), \\ x_1 &= \frac{a^2}{p}\mu_1, \quad x_2 = \frac{b^2}{p}\mu_2, \quad x_3 = \frac{c^2}{p}\mu_3, \\ p &= \sqrt{(a\mu_1)^2 + (b\mu_2)^2 + (c\mu_3)^2}, \\ A &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + (I_1 - I_2)\cos(2\delta)), \\ B &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2 - (I_1 - I_2)\cos(2\delta)), \\ F &= \frac{1}{2}(I_2 - I_1)\sin(2\delta), \\ C &= I_3.\end{aligned}$$

Die I_i sind dabei die drei Komponenten des Trägheitstensors in Hauptachsenform, die Reibungszahlen c_i werden experimentell ermittelt. Wir werden für unsere Berechnungen

eine bereits für MATLAB geschriebene Funktion verwenden, welche auf dem Newton-Algorithmus beruht. Setzen wir Beispieldaten eines realen Wackelsteins ein, z.B.

$$\begin{aligned}
 a &= 20 \text{ cm}, & b &= 2 \text{ cm}, & c &= 3 \text{ cm}, & h &= 1 \text{ cm}, \\
 I_1 &= 17 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2, & I_2 &= 2 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2, & I_3 &= 16 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2, & m &= 1 \text{ kg},
 \end{aligned}$$

so gelangen wir mit den Anfangsbedingungen,

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 0^\circ, & \beta &= 0.5^\circ, & \alpha &= -0.5^\circ, \\
 v_1 &= 0.00075 \text{ m/s}, & v_2 &= -0.00196 \text{ m/s}, & v_3 &= 0.8693 \text{ m/s}, \\
 \omega_1 &= 5 \text{ rad/s}, & \omega_2 &= 0 \text{ rad/s}, & \omega_3 &= 0 \text{ rad/s},
 \end{aligned}$$

auf die in Abbildung 3.11 gezeigten Plots. Wir stellen dabei fest, dass sich die Drehrichtung bei $t = 3 \text{ s}$ umdreht. Im Bereich des Maximums von $\gamma(t)$ geht sowohl bei $\beta(t)$ als auch $\delta(t)$ die Amplitude nahezu gegen 0, während bei $\alpha(t)$ das Maximum der Amplitude getroffen wird.

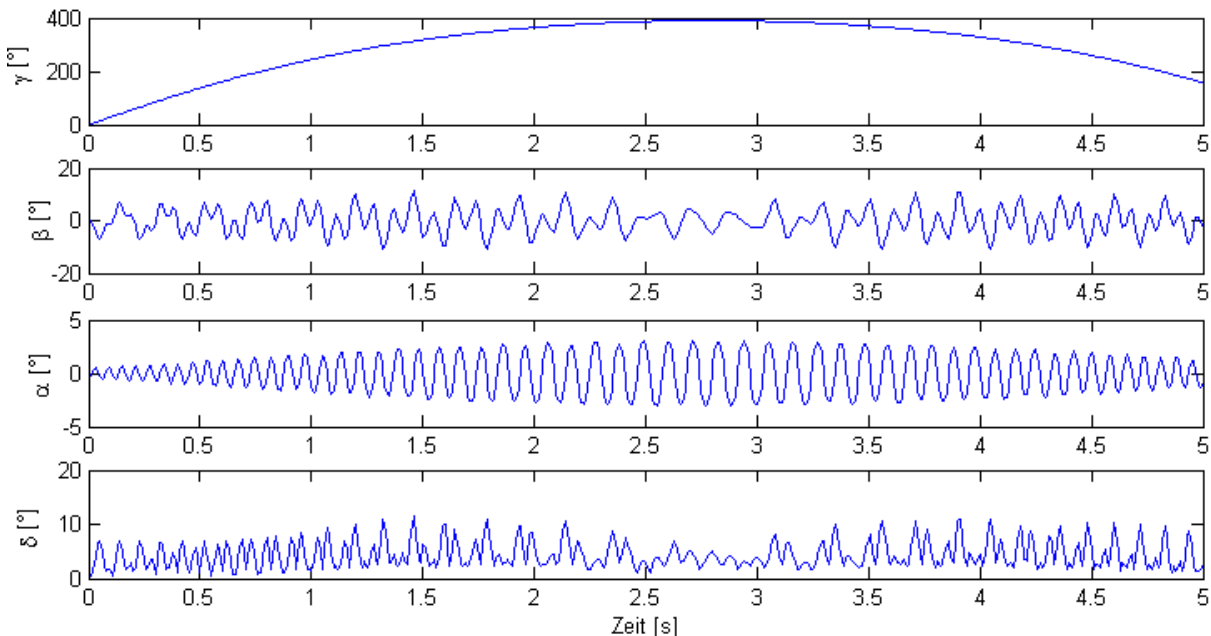


Abbildung 3.11: Plot der entscheidenden Winkel beim Keltischen Wackelstein unter obigen Voraussetzungen

Um die in Abbildung 3.11 dargestellten Plots erklären zu können reicht es, den Keltischen Wackelstein zu betrachten. Wir stellen fest, dass dieser im Umkehrpunkt der Drehrichtung am stärksten um α wackelt, während er nahezu permanent um β wackelt. Zu δ können wir aus der Betrachtung des Wackelsteins nicht direkt schließen, da δ eingeführt wurde um die Unwucht zu charakterisieren.

Es ist klar, dass $\delta(t)$ am Maximum von $\gamma(t)$ gegen den Wert im Ruhezustand geht (Amplitude $\rightarrow 0$), da das Maximum von $\gamma(t)$ mit einem Stillstand der Drehgeschwindigkeit $v_3 = 0$ verbunden ist, und somit die Massenverteilung dem statischen Fall in Ruhelage entspricht.

Wir werden nun versuchen die Daten eines Athleten bei der O'Brien-Technik zu erarbeiten, um dieselben Plots für die O'Brien-Technik zu erhalten. Durch den Plot von $\gamma(t)$ können wir dann auf das horizontale Drehmoment schließen, welches wir verwenden werden, um die Energie des Athleten beim Abstoß des Kugel zu berechnen.

Mit Hilfe von Abbildung 3.7, Phase 3, gelangen wir zu dem Ergebnis, dass den Abstand Rücken-Boden in etwa $c = h_A/3$ gilt, wobei h_A für die Höhe des Athleten steht. Diesen Wert erhalten wir dadurch, indem wir die Höhenverteilung Torso:Beine in etwa auf 1:1 schätzen und noch zusätzlich Kopf und Beugung der Beine berücksichtigen. Für die beiden Halbachsen schätzen wir $a = h_A/2$ und $b = r$, wobei r der Radius des Athleten aus den vorherigen Rechnungen sein soll. Den größten Unsicherheitsfaktor erhalten wir durch die Höhe h , welcher den Abstand des Aufhängepunktes zum Schwerpunkt beschreiben soll. Wir nehmen für den Anfang $h = 10$ cm an. Als Masse m verwenden wir die Masse M des Athleten.

Den Trägheitstensor zur Berechnung des Keltischen Wackelsteins berechnen wir explizit. Dazu verwenden wir die Formel

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \varrho(\vec{r}) (r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta) dV. \quad (3.10)$$

Zunächst wollen wir mit kartesischen Koordinaten arbeiten, welche anschließend durch die Längen der Halbachsen normiert werden. Abschließend werden wir eine Transformation in Kugelkoordinaten vornehmen - wobei die anfängliche Normierung uns dahingehend helfen wird, dass das Ellipsoid als Einheitskugel berechnet werden kann. Zunächst berechnen wir ganz allgemein das Verhältnis Masse zu Dichte eines homogenen Rotationsellipsoids. Es ergibt sich

$$M = \int_V \varrho(\vec{r}) dV = \varrho \int_V dx dy dz = abc \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{4\pi}{3} abc \varrho. \quad (3.11)$$

Wir haben dafür bereits die angesprochene Normierung genutzt, welche im Prinzip durch

$$x = a\tilde{x}, \quad y = b\tilde{y} \quad \text{und} \quad z = c\tilde{z},$$

beschrieben wird. Wir berechnen nun einige Einträge des Trägheitstensors. Für den ersten ($\alpha = \beta = 1$) Eintrag ergibt sich mit Hilfe von Gleichung 3.10

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_V \varrho(r^2 - x^2) dx dy dz = abc \varrho \int_V \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{=r^2} - a^2 \tilde{x}^2 \tilde{x} \tilde{y} \tilde{z} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = \\ &= abc \varrho \int_V (b^2 \tilde{y}^2 + c^2 \tilde{z}^2) d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = \\ &= abc \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^4 dr (b^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \theta) = \\ &= \frac{1}{5} \underbrace{\frac{4\pi}{3} abc \varrho}_{=M} (b^2 + c^2) = \frac{M}{5} (b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Hier konnten wir ausnutzen, dass wir über Gleichung 3.11 bereits das Verhältnis von Masse zu Dichte kennen. Dabei haben wir eine Transformation in Kugelkoordinaten über

$$\tilde{x} = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \tilde{y} = r \sin \theta \sin \varphi \quad \text{und} \quad \tilde{z} = r \cos \theta,$$

ausgeführt. Für die anderen Diagonalelemente ergibt sich ein ähnliches Ergebnis. Die Deviationsmomente sind beim Rotationsellipsoid alle gleich 0, weshalb der Trägheitstensor bereits in Hauptachsenform vorliegt. Es gilt somit

$$I = \frac{M}{5} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Die Anfangsbedingungen der Plots in Abbildung 3.12 wurden im Vergleich zur Abbildung 3.11 dahingehend verändert, dass sich der Athlet vom Start weg in vertikaler Bewegung befindet (d.h. bereits wackelt), während er ansonsten still steht. Über diese vertikale Bewegung wird anschließend das horizontale Drehmoment induziert. Wir setzen also $\omega_1 = 0$ rad/s und $\omega_2 = 5$ rad/s.

3.3.3 Verwendung des Keltischen Wackelsteins

Dieser Wert für ω_2 kann unter Umständen deutlich zu groß sein. Wir werden nun die Anfangsbedingungen so variieren, dass wir den Keltischen Wackelstein bzw. diese Modellrechnung für die O'Brien-Technik verwenden können. In Abbildung 3.13 wurde ω_2 entsprechend verkleinert.

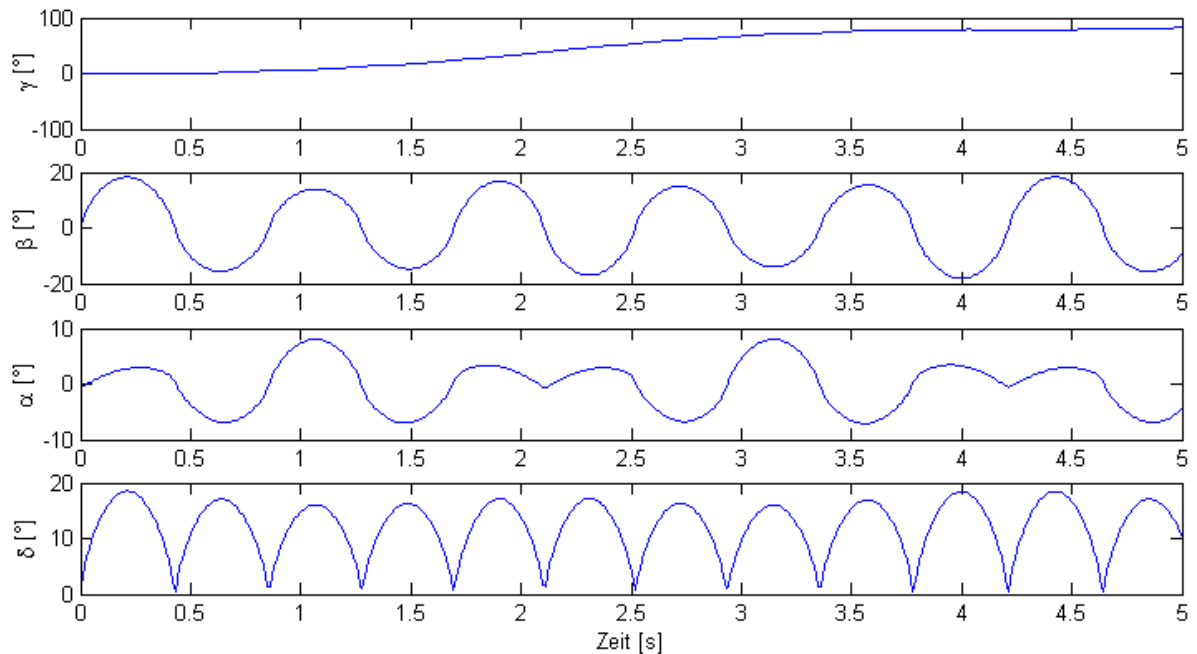


Abbildung 3.12: Plot der entscheidenden Winkel beim Keltischen Wackelstein mit $\omega_2 = 5$ für einen Athleten mit $M = 90$ kg, $h_A = 220$ cm.

Bei $\omega_2 = 0,25$ ist das Ergebnis auf jeden Fall näher an der Realität, aber leider erhalten wir viel zu wenig Drehmoment. Dies kann jedoch bereits in der Realität ebenfalls vorkommen, wenn die O'Brien-Technik nicht korrekt oder mit zu wenig Schwung ausgeführt wird. Das beste und damit realistischste Ergebnis erhalten wir mit $\omega_2 = 1$. Die entsprechenden Plots zu dieser Anfangsbedingung finden sich in Abbildung 3.14.

Nachdem wir nun ein passendes Modell für unsere Rechnungen gefunden haben, können wir eine Formel für die am Ende der Abwurfphase zur Verfügung stehende Energie aufstellen. Wir gehen davon aus, dass die Energie des Drehmoments sich zur Energie der halben Drehung dazu addiert. Um die dissipativen Kräfte später miteinzubauen, führen wir wieder einen Parameter $\sigma \in (0, 1)$ ein.

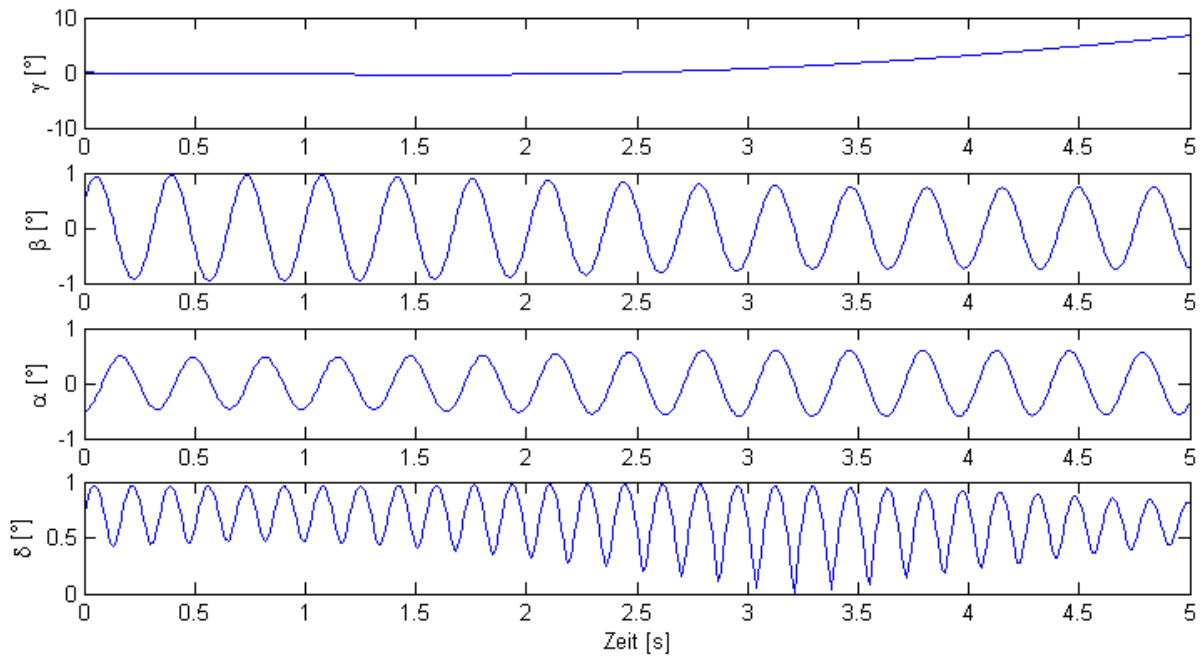


Abbildung 3.13: Plot der entscheidenden Winkel beim Keltischen Wackelstein mit $\omega_2 = 0,25$ der Daten für einen Athleten mit $M = 100$ kg, $h_A = 200$ cm.

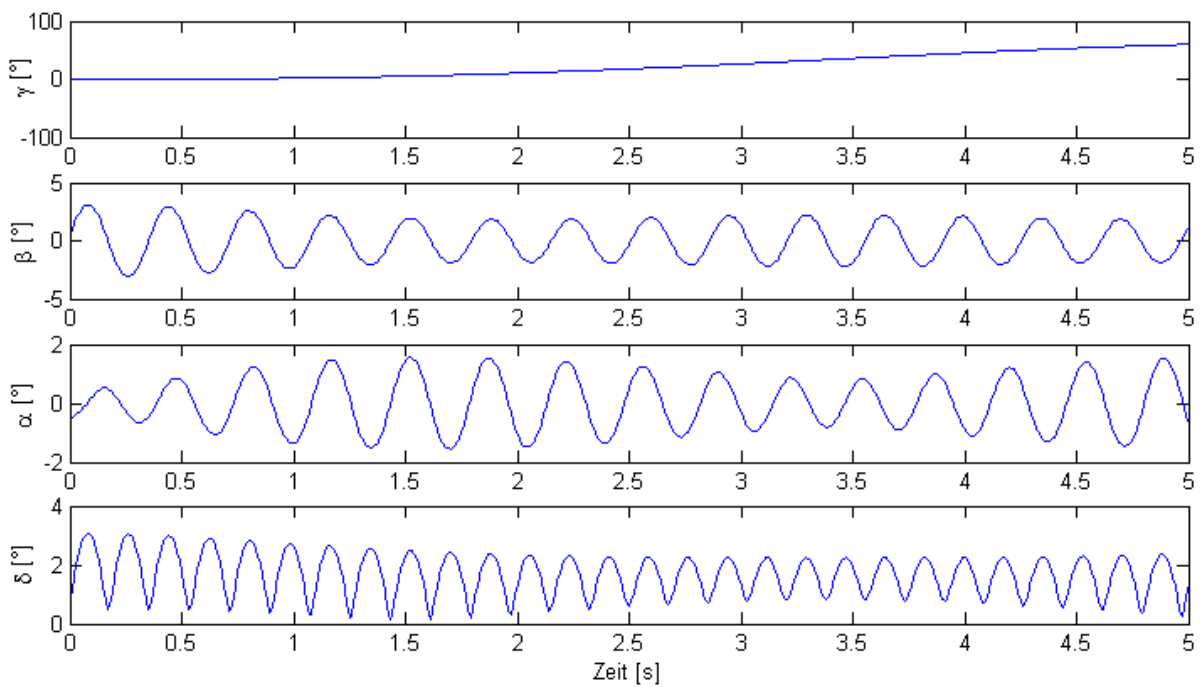


Abbildung 3.14: Plot der entscheidenden Winkel beim Keltischen Wackelstein mit $\omega_2 = 1$ der Daten für einen Athleten mit $M = 90$ kg, $h_A = 200$ cm.

Wir können die Überlegungen, die wir beim Drehstoß und Standstoß gemacht haben, wieder verwenden. Für die Berechnung der Abwurfgeschwindigkeit v_0 benötigen wir lediglich noch einen Ausdruck um

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

zu beschreiben. Analog zur Vorgehensweise bei Gleichung 3.4 erhalten wir

$$\frac{1}{2} I \omega^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} I \omega^2 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} M(\varphi') d\varphi' \approx \frac{I}{2} \omega^2 + M \Delta\varphi.$$

Wir wissen, dass bei der O'Brien Technik eine halbe Umdrehung vollzogen wird, d.h. $\Delta\varphi = \pi$. Des Weiteren ist uns bekannt, dass wir das Drehmoment M ausdrücken können durch

$$M = I\alpha, \quad \alpha = \dot{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t}.$$

Somit erhalten wir durch eine Abschätzung über eine Taylor Entwicklung um $\Delta t = 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + 2\Delta t) + \varphi(t) - 2\varphi(t + \Delta t)}{(\Delta t)^2} \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2\Delta\varphi}{(\Delta t)^2}.$$

Wir identifizieren dieses $\Delta\varphi$ mit dem Winkel, welchen wir aus unseren Plots ablesen. Somit können wir die Rotationsenergie schreiben als

$$E_{\text{rot}} = \frac{\pi}{2t_V^2} I [\pi + 4\Delta\gamma].$$

Für das Trägheitsmoment verwenden wir jetzt nicht mehr das Zylindermodell, sondern das für die Berechnungen des Keltischen Wackelstein aufgestellte Modell eines Rotationsellipsoids aus Gleichung 3.12. Somit gilt

$$I = I_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2) = \frac{M}{5} \left(\frac{h^2}{4} + r^2 \right) = \frac{M}{5} \left(\frac{h^2}{4} + \frac{M}{\pi h \rho} \right).$$

Wir wollen nun unsere Ergebnisse zusammenfassen und in einer Formel zur Berechnung der Abwurfgeschwindigkeit bei der O'Brien-Technik verbinden. Wir erhalten

$$v_0 = \left(\frac{\sigma M / t_V^2}{m^2 + m_{\text{Arm}} m} \left[(M + m) S^2 + \frac{M}{5} \left(\Delta\gamma + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{h^2}{\pi} + \frac{4M}{h\rho} \right) \right] + 2l \frac{F}{m} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

3.3.4 Ergebnisse und Beispielrechnungen

Wir wollen im Folgenden, wie bereits bei der Drehstoßtechnik, Beispielrechnungen vornehmen. Dazu verwenden wir fast alle Parameter wie beim Drehstoß. Wir beachten dabei:

- Die Übertragungskonstante ist bei der O'Brien-Technik ein wenig höher als beim Drehstoß, weshalb wir $\sigma = 0,2$ wählen.
- Die Zeit um die O'Brien-Technik auszuführen dürfte in etwa der Zeit zur Durchführung der Drehstoßtechnik entsprechen. Wir wählen daher erneut $t \approx 1,5$ s.
- Für S und m_{Arm} verwenden wir ebenfalls die selben Werte wie bei den Kalkulationen zur Drehstoßtechnik.
- $\Delta\gamma$ müssen wir aus unseren Plots zum Keltischen Wackelstein ablesen. Wir werden im Folgenden mit $\Delta\gamma \approx 25^\circ$ rechnen.

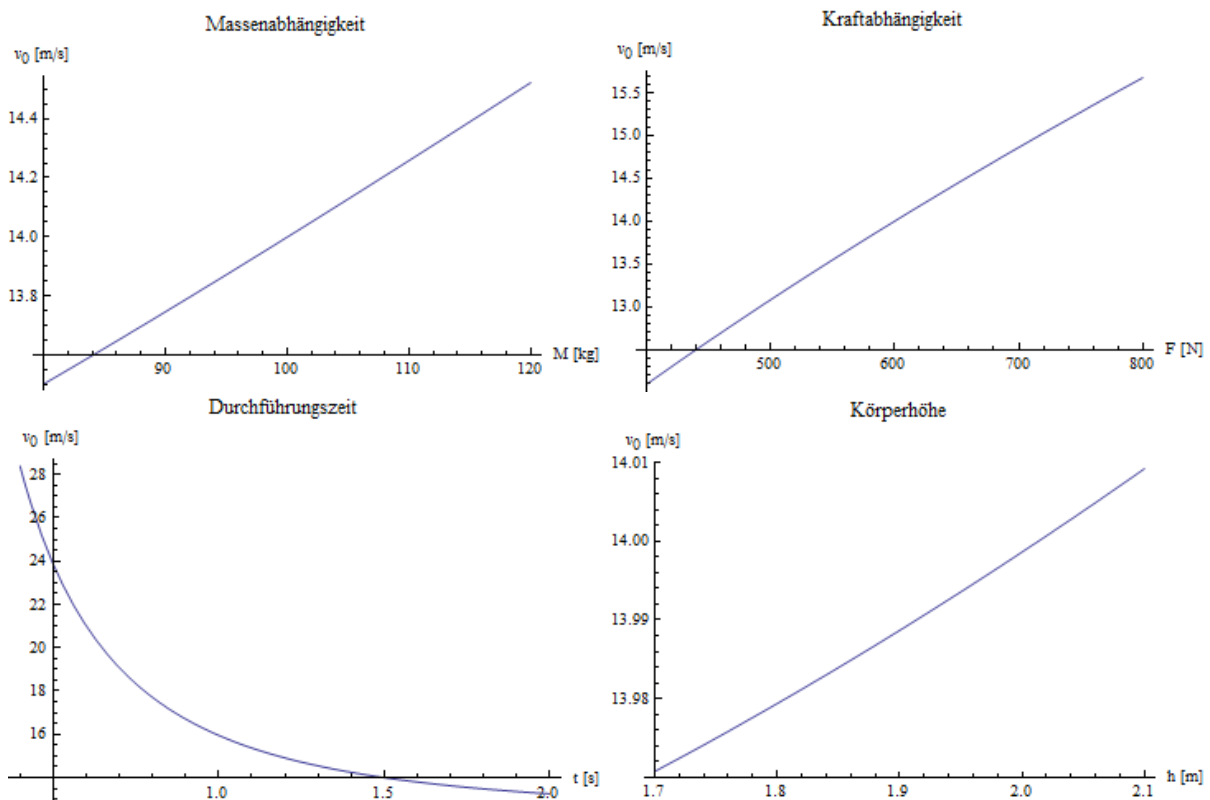


Abbildung 3.15: Abhängigkeit der Abwurfgeschwindigkeit bei der O'Brien-Technik für die Parameter $\sigma = 0,2$, $m = 7,235$ kg, $h = 2$ m, $M = 100$ kg, $t = 1,5$ s, $F = 600$ N und $l = 0,9$ m unter Variation der im Plot stehenden Variable

In Abbildung 3.15 ist die Abhängigkeit der Abwurfgeschwindigkeit bei der O’Brien-Technik von verschiedenen Parametern aufgezeigt. Wir erkennen, dass die Kurven der Abhängigkeiten nun etwas anders als beim Drehstoß, Abbildung 3.6, verlaufen. Wir beobachten folgendes:

- Die Massenabhängigkeit ist nun geringer. Bei der O’Brien-Technik dominiert der Massenfaktor also nicht mehr so stark, weshalb sie somit auch für Athleten mit geringerem Gewicht geeignet ist.
- Die Kraftabhängigkeit ist identisch zur Drehstoßtechnik. Anscheinend ist es rein von der Kraft her gesehen egal, welche Technik verwendet wird. Dieses Ergebnis kann durchaus von der Realität abweichen, da wir die Kopplung der Systeme Vorbereitungsphase und Hauptphase nicht mit berücksichtigt haben.
- Eine Variation in der Geschwindigkeit der Technikausführung hat denselben Effekt wie bei der Drehstoßtechnik. Aufgrund der leichteren Koordination und der geringeren Rotation (Halbe Umdrehung gegenüber einenhalbfachen Drehung bei der Drehstoßtechnik) dürfte es jedoch leichter sein, die O’Brien-Technik zeitmäßig zu optimieren.
- Den deutlichsten Unterschied zwischen beiden Techniken sehen wir bei Variation der Körperhöhe. Während es bei der Drehstoßtechnik vorteilhaft ist, kleiner zu sein, ist es bei O’Brien-Technik vorteilhaft groß zu sein (wenn auch nur geringfügig).

Athlet	h [cm]	M [kg]	l [m]	$\Delta\gamma$ [°]	Bestweite [m]	x'_w [m]	v_0 [m/s]
Ulf Timmermann	195	118	90	30	23,06	22,39	14,22
Alessandro Andrei	191	118	90	28	22,91	22,35	14,21
Udo Beyer	194	130	90	27	22,64	23,18	14,50
Al Feuerbach	186	120	85	25	21,82	21,56	13,96
Randy Matson	203	117	95	35	21,78	23,22	14,50

Tabelle 3.3: Berechnete maximale Wurfweiten einiger Kugelstoßer, welche die O’Brien-Technik verwenden, und deren Bestleistungen mit $\sigma = 0, 2$, $t = 1, 6$ s, $\alpha = 37^\circ$ bei gleicher Kraft $F = 600$ N

Somit können wir jetzt schon feststellen, dass aufgrund der geringeren Masseabhängigkeit und aufgrund der positiven Steigung bei der Abhängigkeit von der Körperhöhe, die O’Brien-Technik für große, dünne Sportler vorzuziehen ist. In Tabelle 3.2 sind einige

Sportler mit den angenäherten Drehstoßergebnissen und ihren tatsächlichen Bestleistungen aufgeführt. Zu beachten ist dabei, dass sowohl Armlänge als auch die durchschnittliche Kraft abgeschätzt werden mussten.

Wir können dabei einsehen, dass die über die Formel berechnete Maximalweite der Athleten immer in etwa 1 m unter deren Bestwert liegt. Dies ist genau entgegengesetzt zu den Ergebnissen beim Drehstoß, bei dem die maximale Reichweite immer über der Bestweite lag. Wir können für dieses Verhalten mehrere mögliche Gründe angeben.

- Die Näherungen - insbesondere das wir die Kopplung zwischen Vorbereitungs- und Hauptphase weggelassen haben - spielen hier eine Rolle.
- Die Drehstoßtechnik ist schwieriger auszuführen. Daher ist es nahezu unmöglich sie zu perfektionieren, weshalb ein Athlet immer unterhalb der möglichen Bestweite liegen wird.
- Bei der O'Brien-Technik wurden zu viele Terme vernachlässigt bzw. unser spekulatives Modell des Keltischen Wackelsteins ist einfach zu weit von der Realität entfernt, um sie korrekt zu beschreiben.
- Der σ Faktor wurde falsch gewählt. Dies ist sicherlich nahezu immer korrekt, aber da eine korrekte Wahl dieses Parameters immer frei und fallabhängig ist, wollten wir versuchen mit einer möglichst allgemeinen Wahl möglichst nahe an fast alle möglichen Fälle zu gelangen.

Als grobe Abschätzung ist dieses Ergebnis jedoch auch akzeptabel, da wir für alle Athleten wie beim Drehstoß den selben durchschnittlichen Kraftwert F verwendet haben, und Armlängen und Durchführungszeiten abschätzen mussten bzw. vereinheitlicht haben. Uns ging es primär darum, diese Technik mit der Drehstoßtechnik vergleichen zu können. Dies ist uns auch ganz gut gelungen, da wir die größten Unterschiede direkt einsehen konnten. Wir wollen dies im nächsten Abschnitt nochmals reflektieren.

3.4 Konsequenzen der Betrachtung

In diesem Abschnitt konnten wir über einige Näherungen und mechanische Zusammenhänge viele wertvolle Aussagen zu drei sehr wichtigen Wurftechniken vornehmen. Wir sahen dabei, dass der Standstoß die Grundlage für alle weiteren Wurftechniken bietet, da wir mit ihm bereits das Grundgerüst aufstellen konnten, welches nur noch entsprechend angepasst

werden musste. Wir konnten die zwei populärsten Techniken im professionellen Kugelstoßen, die Drehstoßtechnik und die Angleittechnik, berechnen und vergleichen.

Wir konnten sehen, dass die Drehstoßtechnik die effektivere von beiden Techniken ist, sich allerdings koordinativ deutlich schwieriger ausführen lässt. Während die O'Brien-Technik für große Sportler einen Vorteil bringt, ist die Drehstoßtechnik vor allem für Sportler mit größerer Körpermasse geeignet. Offensichtlich ist bei der O'Brien-Technik die Kopplung der Vorbereitungsphase an die Hauptphase, im Bezug auf die Unterstützung der Hauptphase, besser.



Abbildung 3.16: Ansicht hinter dem Athleten beim Ausführen der O'Brien-Technik von [Spo]

Wir können uns dies durch die Abbildung 3.16 erklären. Dort erkennen wir deutlich, dass zusätzlich Schwung aus der Vorbereitungsphase mit in die Hauptphase genommen wurde, welcher zu einem Sprung nach vorne führt. Dieser Faktor hätte nicht vernachlässigt werden sollen und liefert eine Erklärung für die Unterschreitung der Bestweiten.

Obwohl unsere Ergebnisse nur als Spekulation bzw. als starke Näherung betrachtet werden dürfen, gelang es uns entscheidende Aussagen über die Techniken vornehmen zu können. Durch das Studium einiger Fachliteratur über Bankdrücken war es möglich, Aussagen bzgl. der zur Verfügung stehenden Kraft machen zu können. Unsere Bewertungen, die maximale Kraft eines Athleten durch die Verwendung der Kugel als Gegenmasse um den Faktor 0,42 zu reduzieren, wird durch nähere Untersuchungen, wie z.B. in [Bak01], gestützt.

Unser Muskulaturmodell aus Kapitel 2.2.4 ist auch hier wieder anzuwenden, weshalb Athleten ihre Kraft im entsprechenden Winkel durchaus optimieren sollten. So wurde ein entsprechendes Trainingsprogramm bereits in [Bar95] diskutiert. Die winkelabhängige Kraft ist ebenfalls häufig Gegenstand einer Untersuchung, wie z.B. in [Cla95] durchgeführt. Ganz allgemein bestätigt uns dieses Kapitel in der Vorgehensweise bei der Untersuchung in Kapitel 2.2.4.

4 Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit konnten wir viele Aussagen zum Kugelstoßen herleiten und beweisen. Wir konnten außerdem einige weitere Aussagen treffen, welche keinesfalls offensichtlich sind. So konnten wir feststellen, dass

- der optimale Winkel nochmals in Bezug auf die Höhe zu bewerten ist. Geläufig ist die Beziehung über die Abwurfhöhe, dass diese jedoch ebenfalls vom Abwurfwinkel abhängt, ist dabei bisher oft übersehen worden.
- der optimale Winkel sicherlich einige Grad unter dem berechneten optimalen Winkel liegen wird. Dies zeigt unser Muskulaturmodell. Athleten, welche im Bereich zwischen $35 - 40^\circ$ werfen, werfen somit nicht direkt im nicht optimalen Winkel, da man diesen speziell für die Gestaltung ihrer Muskulatur berechnen müsste. Wir haben in dieser Arbeit Wege gezeigt, wie der Winkel in die Abwurfformel eingearbeitet werden kann.
- eine Optimierung der Abwurfgeschwindigkeit einer Optimierung des Abwurfwinkels vorzuziehen ist. Dies hat mit dem Muskulaturmodell zu tun, welches uns sagt, dass die Kraft winkelabhängig ist. Deshalb können wir nicht alle Winkel als gleichberechtigt ansehen, sondern müssen entsprechende Winkel mit der für diesen Winkel zur Verfügung stehenden Kraft gewichten.
- der Luftwiderstand in der Horizontalen eine größere Rolle spielt als in der Vertikalen. Die Windstärke spielt dabei aufgrund der Massivität der Kugel nur eine untergeordnete Rolle.
- der Standstoß eine Grundlage für alle weiteren Stoßtechniken bietet. Der Nachteil des Standstoßes besteht darin, dass fast nur die Kraft des Armes verwendet wird, welche beim Kugelstoßen nicht maximal ausgenutzt werden kann. Des Weiteren wird auch die zur Verfügung stehende Kraft nicht vollständig umgesetzt, da der Term unter einer Wurzel steht.

- die Drehstoßtechnik viele Vorteile bietet. So wird die Körpermasse sehr gut ausgenutzt und der Athlet kann über Zeitoptimierung noch einiges aus der Technik herausholen.
- die O'Brien-Technik im Gegensatz zur Drehstoßtechnik die Körpermasse nicht mehr so gut ausnutzt, dafür aber bei zunehmender Körpergröße an Effektivität gewinnt. Auch hier hat der Athlet über Zeitoptimierung noch viel Spielraum für Verbesserungen.

Insgesamt beinhaltet das Thema noch sehr viel Diskussionsstoff, welcher aber nicht Bestandteil dieser Arbeit sein soll. Das hier aufgestellte Muskulaturmodell ist eine Anregung für biomechanische Untersuchungen von Kugelstoßern. In einer solchen Studie könnten explizite Muskelmodelle aufgestellt und die optimalen Winkel somit auf relativ einfache Weise berechnet werden. Es wäre somit möglich vorherzusagen, welcher Winkel für welchen Athleten den günstigsten Abstoßpunkt darstellt, was sicherlich zu einer Leistungssteigerung führen würde.

Danksagungen

Auf diesem Weg möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Bachelorarbeit unterstützt haben. Folgende Personen möchte ich besonders hervorheben:

- *Meine Eltern.* Für ihre Unterstützung und ihr Vertrauen.
- *Meine Freundin.* Für ihre Hilfe und Toleranz im Bezug auf mein Arbeitspensum.
- *Meine Kommilitonen.* Für die zahlreichen fachlichen Diskussionen und Ablenkungen, die den Studienalltag farbenfroher gestaltet haben.
- *Mein Betreuer.* Ohne die ständigen Korrekturen und Einbringungen wäre die Arbeit sicherlicht weit unterhalb dieser Qualität. Die dahingehend investierte Zeit ist für mich persönlich sehr hoch zu bewerten, da dies zum einen keine Pflicht und zum anderen genug andere Arbeit vorhanden war. Vielen Dank für die ausgezeichnete Betreuung!

5 Anlagen

I Numerische Berechnung des Wurfes

Konzept

Um die numerische Berechnung des Wurfes zu realisieren wurde mit Hilfe von Microsoft Visual Studio 2008 in Verbindung mit der Programmiersprache C# und dem Microsoft .NET-Framework eine Windows-Forms-Applikation entwickelt. Dabei stand neben der korrekten Berechnung des Wurfbahn eine möglichst hohe Zahl an variierbaren Parametern, sowie eine zweckdienliche Ausgabe in Form von Funktionsplots im Vordergrund.

Neben den genannten Eigenschaften beherrscht das Programm noch die Speicherung der berechneten Wertetabelle im modernen Xml-Format. Somit ist die Ausgabe auch ohne das Programm lesbar, da man nur x, y -Koordinaten betrachten muss. Die Oberfläche des Programms ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

Oberfläche

Das Programm zeigt direkt im Hauptdialog alle für die Berechnung notwendigen Parameter an. Dadurch ist eine schnelle Manipulation dieser gewährleistet. Als wichtige Parameter wurde dabei die Abwurfgeschwindigkeit v_0 , der Abwurfwinkel α , sowie die Abwurfhöhe h erkannt. Die Benennung der Felder erfolgte dabei analog zu der in dieser Arbeit gewählten Notation. Daneben war ein Auswahlfeld zum Aktivieren des Luftwiderstands notwendig, da der Benutzer dadurch eine schnelle Vergleichsmöglichkeit Vakuumwurf ↔ realer Wurf erhält.

Aufgrund der in dieser Arbeit beschriebenen Möglichkeit die Windgeschwindigkeit mit einzubeziehen, wurde diese Parameter ebenfalls integriert. Ein Winkelparameter für den

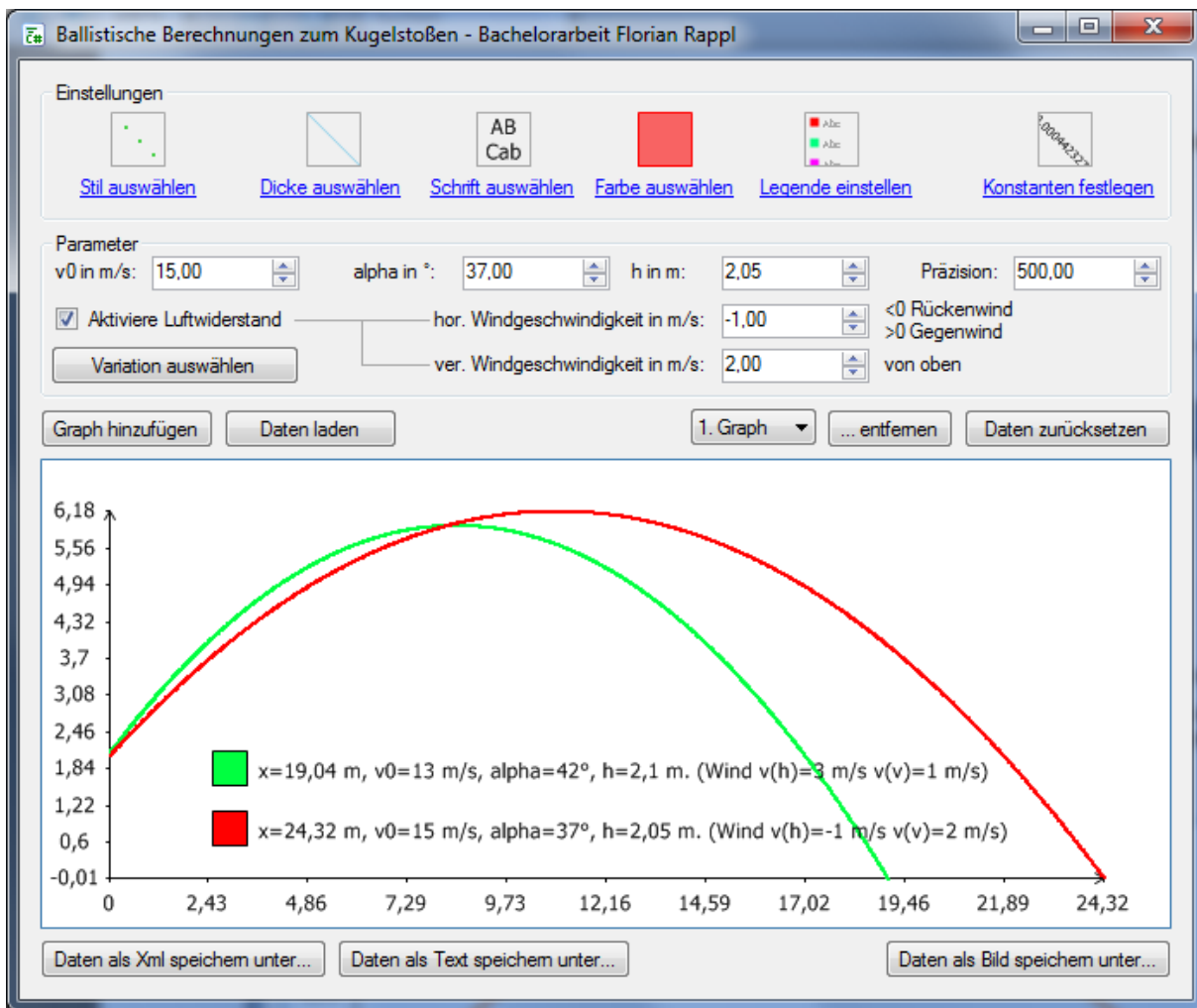


Abbildung 5.1: Die Oberfläche des Programms zur numerischen Berechnung des Wurfes

Wind wurde nicht integriert, weshalb der Wind explizit für die x -Komponente und y -Komponente des Wurfes eingegeben werden muss. Als letzter Parameter wurde eine Präzision eingeführt, welche durch die Zahl der Schrittweiten pro Sekunde bestimmt wird. Wir erhalten für die Präzision p den Zusammenhang

$$p \cdot \Delta t = t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{t}{p},$$

wobei t 1 s ist. Somit erhalten wir z.B. für $p = 100$ ein Δt von 0,01 s. Je größer p ist, desto mehr Rechenschritte müssen vollzogen werden, d.h. desto länger wird die Berechnung dauern und desto mehr Speicher wird verbraucht werden.

Neben den genannten, elementaren, Parametern gibt es noch eine Reihe von Konstanten

und Zeichenparametern, welche in verschiedene Dialoge ausgelagert worden sind. Es gibt Dialoge um

- den **Zeichenstil** (Punkt, Diamant, Kreis, Rechteck, Dreieck) auszuwählen. Der Zeichenstil bestimmt wie ein fester Punkt (berechneter Wert) angezeigt wird. Die Verbindung zwischen zwei berechneten Punkten erfolgt immer durch einen *Spline*, d.h. durch ein interpoliertes Verbindungsstück.
- die **Zeichendicke** auszuwählen. Dabei gibt man einen Wert zwischen 0,5 und 20 an, der dann die Dicke der gezeichneten Linien bestimmt.
- die verwendete **Schrift** auszuwählen. Diese bestimmt die Schriftart, Schriftstil (Fett, Kursiv, ...) und Schriftgröße in der Legende, sowie den Koordinatenachsen (letzteres trifft nur auf den ersten hinzugefügten Graphen zu).
- die **Farbe** des Graphen zu bestimmen.
- die **Legende** einzustellen. Dabei kann man die Legende sowohl am linken als auch am rechten Rand ausrichten. Alle Ausrichtungen werden in der Einheit Pixel getroffen. Über diesen Dialog kann man die Legende auch deaktivieren.
- die **Konstanten** festzulegen. Über diesen Dialog kann die einzelnen Konstanten wie Kugelmasse m , Kugelradius r , Luftdichte ρ oder den Querschnittsfaktor ξ einstellen. Das darüber berechnete (und in der numerischen Kalkulation verwendete) γ kann man nach Variation direkt einsehen. Abbildung 5.2 zeigt diesen Dialog.

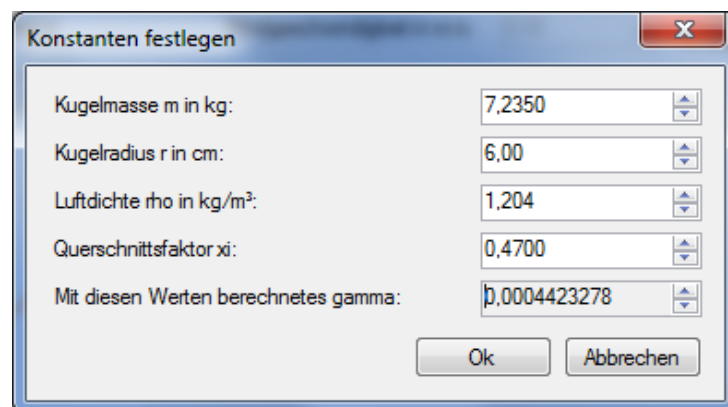


Abbildung 5.2: Der Dialog zum Einstellen der Konstanten

Neben den festlegbaren Parametern hat der Benutzer noch folgende Möglichkeiten mit dem Programm zu interagieren:

- **Variation auswählen** Ermöglicht das Festlegen eines Variationsparameters durch einen Klick in das entsprechende Feld (z.B. Abwurfgeschwindigkeit, Abwurfwinkel, Höhe, Präzision).
- **Graph hinzufügen** Fügt einen Graphen mit den gewählten Parametern zur Liste der hinzugefügten Graphen hinzu.
- **Daten laden** Lädt eine Datei mit gespeicherten Graphendaten (Xml-Format). Dies überschreibt die Liste der hinzugefügten Graphen.
- **Daten entfernen** Entfernt den ausgewählten Graphen aus der Liste der hinzugefügten Graphen.
- **Daten zurücksetzen** Löscht die Liste der hinzugefügten Graphen, d.h. führt quasi einen *Reset* durch.
- **Daten als Xml speichern unter** Speichert die aktuelle Liste der hinzugefügten Graphen in einer Xml-Datei ab. Diese kann wieder geladen werden und ist auch ohne Programm gut lesbar.
- **Daten als Text speichern unter** Speichert die aktuelle Liste der hinzugefügten Graphen in einer ASCII-Datei ab. Diese trennt die Werte über Tabulatoreinzüge, so dass Programme wie *qtiPlot* oder *MATLAB* die Daten einlesen können. Dadurch haben wir eine Vielzahl von Manipulationsmöglichkeiten direkt gegeben.
- **Graph als Bild speichern unter** Speichert die aktuelle Ausgabe (Plot der Liste der hinzugefügten Graphen) in einer Bitmap-Datei (Format frei wählbar, u.a. Bmp, Jpeg und Png enthalten) ab. Wichtig ist, dass die Maße der aktuellen Anzeige übernommen werden.

Algorithmus der numerischen Berechnung

Über den Parameter p wurde bereits die Schrittweite der Intervalle Δt bestimmt. Nun können wir folgenden Algorithmus anwenden:

1. Wir wollen \dot{y} solange berechnen, bis

$$\sum_{i=1}^{i_{\max}} \dot{y}_i \cdot \Delta t \leq -h \quad (5.1)$$

gilt.

2. Dabei ist

$$\dot{y}_i = \dot{y}_{i-1} - g \cdot \Delta t - \gamma \dot{y}_{i-1}^2 \cdot \Delta t,$$

wobei γ sich über $\xi \rho A / 2m$ berechnet. Als Anfangsbedingung legen wir dazu fest, dass

$$\dot{y}_0 = v_0 \sin(\alpha).$$

3. Sobald die Bedingung aus Gleichung 5.1 erfüllt ist, ist die Berechnung der \dot{y}_i abgeschlossen. Wir können dann die Größe

$$t_{\max} = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \Delta t = i_{\max} \Delta t$$

berechnen.

4. Anschließend können wir aus den gewonnenen Daten die x -Komponente berechnen lassen. Dazu gehen wir von $t = 0$ bis $t = t_{\max}$ in Δt Schritten. Erneut lösen wir

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i-1} - \gamma \dot{x}_{i-1}^2 \cdot \Delta t.$$

Als Anfangsbedingung haben wir hier ebenfalls festgelegt, dass

$$\dot{x}_0(t) = v_0 \cos(\alpha).$$

5. Abschließend können wir x, y -Paare bilden, indem wir die Geschwindigkeiten \dot{x} und \dot{y} in Wegstrecken umrechnen. Das heißt ein x, y -Paar ergibt sich über

$$(x_i, y_i) = \left(\sum_{j=1}^i \dot{x}_j \Delta t, \sum_{j=1}^i \dot{y}_j \Delta t \right).$$

Im Programm wurde die entsprechende Berechnungsroutine in den Aufruf einer sog. *BackgroundWorker*-Komponente ausgelagert. Diese hilft uns dabei, einen weiteren Thread für die Berechnung zu starten. Dies hat den Vorteil, dass die Benutzeroberfläche weiterhin auf Eingaben reagiert, und die Berechnung auch abgebrochen werden kann.

```
1 private void backgroundWorker_DoWork(object sender, DoWorkEventArgs e)
2 {
3     //Argumente einlesen von BackgroundWorker
4     object[] o = (object[])e.Argument;
5     double v0 = (double)o[0];
6     double angle = (Math.PI / 180.0) * (double)o[1];
7     double h = (double)o[2];
8     double prec = (double)o[3];
9     bool luftwid = (bool)o[4];
10    double windv0h = luftwid ? (double)o[5] : 0.0;
11    double windv0v = luftwid ? (double)o[6] : 0.0;
12    //delta t über die Präzision bestimmten
13    double deltat = 1.0 / prec;
14    //Diese Klasse speichert die Funktionsdaten
15    Funktionsdaten daten = (Funktionsdaten)o[7];
16    //Zwei dynamische Liste erstellen, welche die v_x, v_y speichern
17    List<double> yvs = new List<double>();
18    List<double> xvs = new List<double>();
19    //Unsere Anfangsbedingung implementieren
20    yvs.Add(vy(v0, angle));
21    xvs.Add(vx(v0, angle));
22    double sumy = 0.0;
23    //Gamma bei Luftwiderstand setzen - ansonsten über 0 deaktivieren
24    double gamma = luftwid ? m_Gamma : 0.0;
25    //v_y lösen
26    do
27    {
28        yvs.Add(yvs[yvs.Count - 1] - gamma * (yvs[yvs.Count - 1] + windv0v) * Math.
                Abs(yvs[yvs.Count - 1] + windv0v) * deltat - 9.81 * deltat);
29        sumy += yvs[yvs.Count - 1] * deltat;
30    }
31    while (sumy > -h); //Iterationsbedingung
32    //v_x lösen
33    for (int i = 1; i < yvs.Count; i++)
34        xvs.Add(xvs[i - 1] - gamma * (xvs[i - 1] + windv0h) * Math.Abs(xvs[i - 1] +
```

```

        windv0h) * deltat);
35 //nun xy-Werte den Funktionsdaten hinzufügen
36 //Anfangspunkt über Anfangsbedingungen
37 daten.AddPunkt(0.0, h);
38 for (int i = 1; i < yvs.Count; i++)
39 //Immer letzten Punkt nehmen und Geschwindigkeit * delta t dazuzählen
40     daten.AddPunkt(daten.X[i - 1] + xvs[i] * deltat, daten.Y[i - 1] + yvs[i] *
        deltat);
41 //Rückgabe der Werte
42 e.Result = daten;
43 }
44
45 //Diese beiden Funktionen berechnen die Startwerte
46 private double vy(double v0, double angle)
47 { return v0 * Math.Sin(angle); }
48 private double vx(double v0, double angle)
49 { return v0 * Math.Cos(angle); }

```

Eine Anmerkung zum Vorzeichen des Luftwiderstands / der Windkraft F_w . Da $F_w \propto v^2$ gilt, wird eine Vorzeichenänderung von v keine Änderung in F_w verursachen. Im Algorithmus benötigen wir jedoch an zwei Stellen einen Vorzeichenwechsel:

- Bei der y -Komponente: Am Anfang wirkt der Luftwiderstand so, dass die Geschwindigkeit nach oben gebremst wird, was die maximale Höhe leicht beeinflusst. Anschließend (d.h. in der Bewegung nach unten) wirkt der Luftwiderstand genau anders herum (Vorzeichenwechsel), was die Fallzeit beeinflusst (leicht verlängert).
- Bei der x -Komponente: Ohne Windgeschwindigkeit erhält man immer eine negative Beschleunigung, d.h. die Kugel wird langsamer. Falls für die Wingschwindigkeit allerdings $v_{\text{wind}} > v_0 \cos(\alpha)$ gilt, beschleunigt der Wind die Kugel leicht. Auch hier haben wir einen Vorzeichenwechsel.

Dieser Vorzeichenwechsel wurde so implementiert, dass

$$a = \gamma \cdot v^2 \quad \longrightarrow \quad a = \gamma \cdot v \cdot |v|.$$

Algorithmus der grafischen Anzeige

Die Plot-Funktionalität läuft über die bereits implementierten Klassen *Funktionsdaten* und *XmlGraph*, die Instanzen der *Funktionsdaten*-Klasse enthält. Da der Code sehr .NET spezifisch ist (aufgrund der Verwendung von GDI+, verbunden mit der Verwendung von .NET-Grafikobjekten), wird hier nur der grundlegende Algorithmus beschrieben. Zunächst muss das Koordinatensystem gezeichnet und generelle Werte festgelegt werden:

1. Zunächst muss die Höhe h und Breite b der Fläche bekannt sein, auf die gezeichnet werden soll. Es werden Abstände zur Kante der Fläche definiert, Δ_x und Δ_y .
2. Falls die Instanz von *XmlGraph* Graphen enthält, also die Länge des Arrays von *Funktionsdaten*-Instanzen größer 0 ist, soll das Koordinatensystem gezeichnet werden. Ansonsten wird hier bereits aufgehört.
3. Es werden die minimale und maximale x - und y -Koordinaten (aller Graphen) ausgelesen und gespeichert. Diese Werte nennen wir x_-, x_+, y_-, y_+ . Zum Auslesen verwenden wir eine Funktion, welche in *XmlGraphen* implementiert worden ist. Diese Funktion geht über alle enthaltenen Instanzen der *Funktionsdaten*-Klasse und vgl. dabei alle Werte.
4. Wir bestimmen $\delta x = x_+ - x_-$ und $\delta y = y_+ - y_-$.
5. Wir zeichnen zwei grundsätzliche Linien, eine von (Δ_x, Δ_y) bis $(\Delta_x, h - \Delta_y)$ (y -Achse) und eine von $(\Delta_x, h - \Delta_y)$ bis $(b - \Delta_x, h - \Delta_y)$ (x -Achse).
6. Wir geben nun eine bestimmte Anzahl an Linien und Achsenpunkte aus. Dazu legen wir zunächst die Anzahl der Punkt n_x (auf der x -Achse) und n_y (Punkte auf der y -Achse) fest.
7. Als nächstes verwenden wir jeweils (eine für x und eine für y) eine Schleife, die von $i = 0$ bis $i < n_j$ ($j \in \{x, y, \}$) geht. Dort wird zunächst der aktuelle Wert berechnet über

$$j_- + \frac{i \cdot (\delta x)}{n_j}.$$

Dieser Wert wird dann links daneben bei der y -Achse oder unterhalb bei der x -Achse auf der Höhe / Breite ausgegeben, welche sich berechnet über (hier am Beispiel für y)

$$\frac{i \cdot (h - 2\Delta_y)}{n_y}.$$

Danach ist das Koordinatensystem gezeichnet. Falls hier noch nicht abgebrochen worden ist (keine Funktionsdaten vorhanden), werden jetzt die einzelnen Graphen gezeichnet. Für jeden Graphen wird dabei folgender Algorithmus ausgeführt:

1. Es muss der spezifische Bereich der Funktionsdaten (x -Werte) korreliert werden mit den Abstand des ganzen Koordiantensystems δx . Es gilt also mit den Werten $x_{+,f}, x_{-,f}$ (maximales und minimales x der Funktionsdaten), dass

$$\eta_x = \frac{x_{+,f} - x_{-,f}}{n_{x,f} - 1} \left[\frac{b - 2\Delta_x}{(\delta x)} \right],$$

wobei $n_{x,f}$ die Anzahl der x -Werte der *Funktionsdaten*-Instanz darstellt.

2. Als nächstes gehen wir in eine Schleife, welche von $i = 0$ bis $i = n_y - 1$ läuft. In der Schleife wird jeder y -Wert aufgerufen. Zunächst legen wir dabei den neuen Zeichenpunkt fest. Das heißt wir müssen den x - und y -Wert verwenden und ihn in das Zeichenkoordinatensystem transformieren. Dies erhalten wir über

$$(x_i, y_i) \rightarrow \left(\Delta_x + i \cdot \eta_x, h - \Delta_y - \left[(h - 2\Delta_y) \frac{y_i - y_-}{(\delta y)} \right] \right),$$

wobei y_i das i -te Element des y -Wertearrays ist, also der $(i + 1)$. y -Wert.

3. Jetzt können wir den Punkt zeichnen. Alternativ kann man diesen Punkt noch mit dem vorhergehenden Punkt verbinden, wenn man sich diesen merkt und eine Abfrage einbaut, ob $i > 0$ ist (d.h. es gibt erst ab dem 2. Durchlauf, also bei $i = 1$ einen vorhergehenden Punkt).

II Parametereinstellungen zur Berechnung der O'Brien-Technik mit Hilfe des Keltischen Wackelsteins

Konzept

Um die Berechnungen des Keltischen Wackelsteins leicht vornehmen zu können wurde ein bereits fertig gestelltes *MATLAB* Programm verwendet. Auf der Internetseite <http://www.autolev.com/WebSite/SampleProblemRattleback/Rattleback.html> gibt es zahlreiche Implementierungen für verschiedenste Programmiersprachen und Programme. Wir entschieden uns für den Newton-Algorithmus, da dieser leicht verständlich und dadurch auch leicht manipulierbar ist. Die Performance spielte für uns keine große Rolle, da die Berechnungen bei keinem der beiden Algorithmen (Newton und Kane) länger als ein paar Sekunden benötigten.

Dennoch mussten die Parameter des Keltischen Wackelsteins unserem Problem (O'Brien-Technik) angepasst werden. Nach Berechnung der Trägheitsmomente konnten wir die entsprechenden Konstanten abändern (bzw. mit der Körperhöhe eine hinzufügen). Am Ende mussten noch die Startwerte einiger Parameter verändert werden, um den Startwerten bei der Durchführung der O'Brien-Technik in etwa zu entsprechen. Die hier aufgeführten Einstellungen erwiesen sich als akzeptabel.

Ablauf der Berechnung

Nach dem Anpassen der Einstellungen auf den Athleten in Körperhöhe und Masse, muss nur noch das Programm ausgeführt und die Ergebnisse geplottet werden. Das Programm wird mit dem entsprechenden Dateinamen im Arbeitsverzeichnis aufgerufen - in unserem Fall war dies *OBrien*.

Anschließend müssen die gespeicherten Daten in eine Matrix geladen werden. Die Datei, in welcher die Daten gespeichert worden sind heißt **rattlebackNewton.1**. Abschließend müssen nur noch die entsprechenden Plot Befehle ausgeführt werden.

Folgende Befehle wurden zum Beispiel von uns verwendet um die in dieser Arbeit bzgl. der O'Brien-Technik aufgezeigten Plots zu erstellen.

```

1 Y=load('rattlebackNewton.1');
2 figure
3 subplot(4,1,1); plot(Y(:,1),Y(:,2));
4 subplot(4,1,2); plot(Y(:,1),Y(:,3));
5 subplot(4,1,3); plot(Y(:,1),Y(:,4));
6 subplot(4,1,4); plot(Y(:,1),Y(:,5));

```

Einstellungen

```

1 ha      = 203.0;           % cm      Constant
2 M       = 147.0;         % kg     Constant
3 a       = sqrt(M/pi/ha*1000); % cm     Constant
4 b       = ha/2;         % cm     Constant
5 c       = ha/3;         % cm     Constant
6 g       = 9.81;         % m/sec^2 Constant
7 I11     = 0.2*M*(b^2+c^2); % kg*cm^2 Constant
8 I22     = 0.2*M*(a^2+c^2); % kg*cm^2 Constant
9 I23     = 0;             % kg*cm^2 Constant
10 I33    = 0.2*M*(a^2+b^2); % kg*cm^2 Constant
11 q1     = 0.0;           % deg   Initial Value
12 q2     = 0.5;           % deg   Initial Value
13 q3     = -0.5;          % deg   Initial Value
14 v1     = 0;             % m/sec Initial Value
15 v2     = 0;             % m/sec Initial Value
16 v3     = 0;             % m/sec Initial Value
17 w1     = 0.0;           % rad/sec Initial Value
18 w2     = 2.0;           % rad/sec Initial Value
19 w3     = 0.0;           % rad/sec Initial Value
20 TINITIAL = 0;           % sec   Initial Time
21 TFINAL  = 5;           % sec   Final Time
22 INTEGSTP = 0.01;       % sec   Integration Step
23 PRINTINT = 1;          % Positive Integer Print-Integer
24 ABSERR  = 1.0E-07;     %       Absolute Error
25 RELERR  = 1.0E-07;     %       Relative Error

```

Tabellenverzeichnis

2.1	Betrag des optimalen Abwurfwinkels für verschiedene Abwurfhöhen und deren zugehörigen Abwurfwinkel	22
2.2	Flugzeiten t'_w [s] und Wurfweiten x'_w [m] in Abhängigkeit von der Abwurfgeschwindigkeit v_0 [m/s] bei einer Abwurfhöhe von 2 m und optimalen Abwurfwinkel	23
2.3	Zusammenstellung einiger Daten bei den Olympischen Spielen 1972 nach [Bar96]	27
2.4	Variation zum Finden der korrekten Parameter für den x_{exp} -Wert von Briesenick aus Tab. 2.3	28
2.5	Einfluss der horizontalen Windgeschwindigkeit auf die Wurfweite bei $v_0 = 13$ m/s, $\alpha = 45^\circ$ und $h = 2$ m gegenüber Windstille	29
2.6	Einfluss der vertikalen Windgeschwindigkeit auf die Wurfweite bei $v_0 = 13$ m/s, $\alpha = 45^\circ$ und $h = 2$ m gegenüber Windstille	30
2.7	Athleten mit Körperhöhe, Masse und deren Rekordweiten nach [Wikb]	31
3.1	Beispielrechnungen zur Standstoßtechnik mit $\sigma = 0,7$, $t = 0,5$ s bei einem Abwurfwinkel α von 40° und einer Abwurfhöhe von $h_s + l \sin(40^\circ)$ mit $h_s = h - 0,3$ m	40
3.2	Berechnete maximale Wurfweiten einiger Kugelstoßer, welche die Drehstoß Technik verwenden, und deren Bestleistungen mit $\sigma = 0,15$, $t = 1,6$ s, $\alpha = 37^\circ$ bei gleicher Kraft $F = 600$ N	45
3.3	Berechnete maximale Wurfweiten einiger Kugelstoßer, welche die O'Brien-Technik verwenden, und deren Bestleistungen mit $\sigma = 0,2$, $t = 1,6$ s, $\alpha = 37^\circ$ bei gleicher Kraft $F = 600$ N	57

Abbildungsverzeichnis

2.1	Plot der Wurfparabel ab $h = 0^+$ bis $h = 0^-$ für $g = 10 \text{ m/s}^2$ und $v_0 = 10 \text{ m/s}$ bei $\alpha \in \{\pi/8, \pi/6, \pi/4, \pi/3\}$	12
2.2	Skizze unseres Modells des Wurfes beim Kugelstoßes	12
2.3	Plot der Wurfparabel ab $h = 0$ bis $h = -14 \text{ m}$ für $g = 10 \text{ m/s}^2$ und $v_0 = 10 \text{ m/s}$ bei $\alpha \in \{\pi/8, \pi/6, \pi/4, \pi/3\}$	13
2.4	Optimaler Abwurfwinkel für $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ und $v_0 = 12 \text{ m/s}$ bei Variation der Abwurfhöhe	14
2.5	Optimaler Abwurfwinkel für $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ und $h = 2 \text{ m}$ bei Variation der Abwurfgeschwindigkeit	15
2.6	Wurfweite x'_w [m] in Abhängigkeit der Abwurfhöhe h [m] bei $\alpha = \alpha_{\text{opt}}(h)$ und $v_0 = 13 \text{ m/s}$	17
2.7	Wurfweite x'_w [m] in Abhängigkeit des Abwurfwinkels bei einer beispielhaften winkelabhängigen Kraft (blau) und bei einer winkelunabhängigen Kraft (violet) mit $\bar{F}_{\text{max}} = 300 \text{ [N]}$ mit $\Omega = 1 \text{ m/kg}$ bei $h = 2 \text{ m}$	19
2.8	Wurfweite x'_w [m] in Abhängigkeit des Abwurfwinkels bei einer winkelabhängigen Kraft der Form $F \cos^2(\alpha/2)$ bei $F = 300, 310, 320 \text{ N}$ und bei einer winkelunabhängigen Kraft mit $F = 300 \text{ N}$ mit $\Omega = 1 \text{ m/kg}$ bei $h = 2 \text{ m}$	20
2.9	Optimaler Abwurfwinkel in Abhängigkeit der Abwurfhöhe gegen die Abwurfhöhe in Abhängigkeit des Abwurfwinkels für $v_0 \in \{13, 14\} \text{ m/s}$, $l \in \{80, 90\} \text{ cm}$ und $h \in \{150, 160\} \text{ cm}$	21
2.10	Numerische Auswertungen bei Daten von Feuerbach ohne Luftreibung (orange) und mit Luftwiderstand (rot: $v_{w,h} = 0$, blau: $v_{w,h} = 15 \text{ m/s}$ Rückwind)	28
2.11	Verifikation der Rechnung von [Tut76] mit Hilfe unseres Computerprogramms	30
3.1	Ablauf eines Standstoßes beim Kugelstoßen von [Spo]	34

3.2	Abhängigkeit der Abwurfgeschwindigkeit beim Standstoß für die Parameter $\sigma = 0,7$, $m = 7,235$ kg, $h = 2$ m, $M = 100$ kg, $t = 1$ s, $F = 600$ N und $l = 0,9$ m unter Variation der im Plot stehenden Variable	39
3.3	Ablauf eines Drehstoßes beim Kugelstoßen - Aufbau der Rotationsenergie, Original von [Bau98, Seite 310] und eingefärbt von [Spo]	41
3.4	Ablauf eines Drehstoßes beim Kugelstoßen - Umsetzen der Energie, Original von [Bau98, Seite 310] und eingefärbt von [Spo]	41
3.5	Weg beim Drehstoß aus der Vogelperspektive	42
3.6	Abhängigkeit der Abwurfgeschwindigkeit beim Drehstoß für die Parameter $\sigma = 0,15$, $m = 7,235$ kg, $h = 2$ m, $M = 100$ kg, $t = 1,5$ s, $F = 600$ N und $l = 0,9$ m unter Variation der im Plot stehenden Variable	44
3.7	Ablauf der O'Brien-Technik beim Kugelstoßen - Maximierung der Anfangskraft von, Original von [Bau98, Seite 298] und eingefärbt von [Spo]	46
3.8	Ablauf der O'Brien-Technik beim Kugelstoßen - Rotation und Verlagerung der Energie des Körpers, Original von [Bau98, Seite 299] und eingefärbt von [Spo]	47
3.9	Veranschaulichung der wichtigsten Parameter beim Keltischen Wackelstein aus [Kuy07, Seite 222]	48
3.10	Querschnitt des Keltischen Wackelsteins aus [Kuy07, Seite 223]	48
3.11	Plot der entscheidenden Winkel beim Keltischen Wackelstein unter obigen Voraussetzungen	50
3.12	Plot der entscheidenden Winkel beim Keltischen Wackelstein mit $\omega_2 = 5$ für einen Athleten mit $M = 90$ kg, $h_A = 220$ cm.	53
3.13	Plot der entscheidenden Winkel beim Keltischen Wackelstein mit $\omega_2 = 0,25$ der Daten für einen Athleten mit $M = 100$ kg, $h_A = 200$ cm.	54
3.14	Plot der entscheidenden Winkel beim Keltischen Wackelstein mit $\omega_2 = 1$ der Daten für einen Athleten mit $M = 90$ kg, $h_A = 200$ cm.	54
3.15	Abhängigkeit der Abwurfgeschwindigkeit bei der O'Brien-Technik für die Parameter $\sigma = 0,2$, $m = 7,235$ kg, $h = 2$ m, $M = 100$ kg, $t = 1,5$ s, $F = 600$ N und $l = 0,9$ m unter Variation der im Plot stehenden Variable .	56
3.16	Ansicht hinter dem Athleten beim Ausführen der O'Brien-Technik von [Spo]	59
5.1	Die Oberfläche des Programms zur numerischen Berechnung des Wurfes . .	66
5.2	Der Dialog zum Einstellen der Konstanten	67

Literaturverzeichnis

- [Bak01] Baker, D. - Nance, S. - Moore, M. The Load That Maximizes the Average Mechanical Power Output During Explosive Bench Press Throws in Highly Trained Athletes. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 2001, 15(1), 20-24, 2001.
- [Bar95] Barnett, C. - Kippers, V. - Turner, P. Effects of Variations on the Bench Press Exercise on the EMG Activity of Five Shoulder Muscles. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 1995, 9(4), 222-227, 1995.
- [Bar96] Bardy, P. *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Verlag Franzbecker, 3 edition, 1996. ISBN 3-88120-232-3.
- [Bau98] G. Bauersfeld, K.H. Schröter. *Grundlagen der Leichtathletik*. 4 edition, 1998. ISBN 3-328-00821-7.
- [Bra05] H.D. Brandt, S. Dahmen. *Mechanik*. Springer, 4 edition, 2005. ISBN 3-540-21666-9.
- [Bre04] H. Breuer. *dtv-Atlas Physik, Band 1*. dtv, 7 edition, 2004. ISBN 3-423-03226-X.
- [Cla69] C.E. Clauser. *Weight, Volume, and Center of Mass of Segments of the Human Body*. AMRL Technical Report 69-70, 1969.
- [Cla95] Clark, R.A. - Bryant, A.L. - Humphries, B. A Comparison of Force Curve Profiles Between the Bench Press and Ballistic Bench Throws. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 1995, 9(4), 222-227, 1995.
- [Ell89] Elliot, B.C. - Wilson, G.J. - Kerr, G.K. A biomechanical analysis of the sticking region in the bench press. *Medicine and Science in Sports and Exercise Vol. 21, No. 4*, 1989.

- [Kuy07] F. Kuypers. *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH, 8 edition, 2007. ISBN 3-527-29269-1.
- [Lic78] Lichtenberg, D.B. - Wills, J.G. Maximizing the range of the shot put. *Am. J. Phys.* 46(5), 1978.
- [Luc05] Luca, R.D. Shot-put kinematics. *Eur. J. Phys.* 26(1031-1036), 2005.
- [Osw04] Oswald, U. Mathematische Modelle zum Kugelstossen. *vsmp Bulletin* 94, 2004.
- [Sch94] D. Schmidtbleicher. *Training in Schnellkampfsportarten aus Kraft und Schnelkraft im Sport*. Deutscher Ärzteverlag Köln, 1994. ISBN 3-769-10288-6.
- [Spo] *Sportpädagogikseiten zum Kugelstoßen*. Rolf Dober. URL sportunterricht.de, (besucht am 2010-03-20).
- [Tut76] V.N. Tutjowitsch. *Theorie der sportlichen Würfe, Teil 1-3*. 1976.
- [Wika] *Der Mensch in Zahlen*. Wikimedia. URL de.wikibooks.org/wiki/Mensch_in_Zahlen, (besucht am 2010-03-25).
- [Wikb] *Seiten zum Kugelstoßen und der Kugelstoßer*. Wikimedia. URL de.wikipedia.org/wiki/Kugelstossen, (besucht am 2010-05-17).
- [Wil89] K. Willimczik. *Biomechanik der Sportarten*. rororo, 1 edition, 1989. ISBN 3-499-18601-2.