

# **Analysis III für Physiker**

Mitschrift der Vorlesung von  
Professor Dr. Jens Habermann  
im Wintersemester 2008 / 09

Florian Rappl

14. März 2009

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung in die komplexe Analysis</b>	<b>2</b>
1.1	Die komplexen Zahlen . . . . .	2
1.2	Holomorphe Funktionen . . . . .	10
1.2.1	Differentiation im Komplexen . . . . .	11
1.2.2	Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen . . . . .	14
1.2.3	Unterschied zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit . . . . .	16
1.2.4	Die komplexe Exponentialfunktion . . . . .	18
1.3	Komplexe Integration . . . . .	22
1.3.1	Stammfunktion . . . . .	26
1.4	Analytische Funktionen . . . . .	32
1.4.1	Potenzreihen . . . . .	32
1.4.2	Die Logarithmus-Funktion . . . . .	35
1.4.3	Taylorentwicklung . . . . .	38
1.5	Isolierte Singularitäten - Laurent-Reihen . . . . .	41
1.5.1	Der Riemann'sche Fortsetzungssatz . . . . .	41
1.5.2	Klassifikation isolierter Singularitäten . . . . .	42
1.5.3	Laurent-Reihe . . . . .	44
1.6	Der Residuensatz . . . . .	47
1.6.1	Die Umlaufzahl (Indexfunktion) . . . . .	50
1.6.2	Der Residuensatz . . . . .	53
<b>2</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>58</b>
2.1	Elementare Lösungsmethoden . . . . .	60
2.2	Lineare Differentialgleichungen und Systeme . . . . .	69
2.3	Hauptsätze über Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Daten . . . . .	76
2.4	Autonome Systeme . . . . .	87
2.5	Rand-und Eigenwertprobleme . . . . .	104
2.6	Spezielle Funktionen in der Physik . . . . .	111

# Kapitel 1

## Einführung in die komplexe Analysis

### 1.1 Die komplexen Zahlen

**Definition 1.1.1 (Körper  $\mathbb{C}$ , Definition nach Hamilton)** *Bezeichne mit  $\mathbb{C}$  die Menge aller geordneten, reellen Zahlenpaare  $(a, b)$ , versehen mit den beiden Operationen*

$$\begin{aligned} + : (a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d), \\ \cdot : (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, bc + ad). \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist ein Körper, genannt der Körper der komplexen Zahlen.

#### Bemerkungen

1. Die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (x, 0)$  ist ein injektiver Homomorphismus. Mittels  $\Phi$  lässt sich  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  einbetten. Identifikation:  $x \in \mathbb{R}$  mit  $(x, 0) \in \mathbb{C}$ , so ist  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  ein Unterkörper von  $\mathbb{C}$ .
2. Im Gegensatz zu  $\mathbb{R}$  kann  $\mathbb{C}$  nicht angeordnet werden.
3. Setzen wir  $i := (0, 1)$ , die imaginäre Einheit, so können wir schreiben:

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy,$$

$$i^2 = -1. \tag{1.1}$$

Zu  $z = x + iy$  schreiben wir:

$$x = \operatorname{Re}(z),$$

der Realteil von  $z$ .

$$y = \operatorname{Im}(z),$$

der Imaginärteil von  $z$ .

4. Durch die Identität  $i^2 = -1$  ist die Multiplikation in  $\mathbb{C}$  eindeutig festgelegt, denn es gilt:

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc)$$

5. Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene mittels  $\mathbb{R}^2$  Koordinatensystem.

□

### Definition und Bemerkung

1. Unter dem (Absolut-)Betrag einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  verstehen wir  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Der Betrag  $|z|$  ist somit der euklidische Abstand des Punktes  $z = (x, y)$  vom Ursprung  $(0, 0)$ . Elementare Eigenschaften sind:

$$|z\tilde{z}| = |z||\tilde{z}|,$$

$$|z + \tilde{z}| \leq |z| + |\tilde{z}|.$$

Es gilt noch zusätzlich:

$$\left| |z| - |\tilde{z}| \right| \leq |z + \tilde{z}| \leq |z| + |\tilde{z}|,$$

Für alle Gleichungen gilt:  $\forall z, \tilde{z} \in \mathbb{C}$ .

2. Die Zahl  $\bar{z} := x - iy$  heißt die zu  $z = x + iy$  konjugiert komplexe Zahl. Man sieht sofort:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Außerdem definiert die Abbildung  $z \mapsto \bar{z}$  einen Homomorphismus auf dem Ring  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , denn

$$\begin{aligned} \overline{z + \tilde{z}} &= \bar{z} + \bar{\tilde{z}}, \\ \overline{z \cdot \tilde{z}} &= \bar{z} \cdot \bar{\tilde{z}}, \quad z, \tilde{z} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\overline{\bar{z}} = z.$$

Mit der Identität  $z\bar{z} = |z|^2$ , ( $z \in \mathbb{C}$ ) können wir die Division zweier komplexer Zahlen  $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}$  auf elegante Art darstellen:

$$\frac{z}{\tilde{z}} = \frac{z\bar{\tilde{z}}}{\tilde{z}\bar{\tilde{z}}} = \frac{z\bar{\tilde{z}}}{|\tilde{z}|^2}.$$

Insbesondere gilt somit:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

3. Anstatt der Angabe von Real- und Imaginärteil  $(x, y)$  können wir eine komplexe Zahl auch in Polarkoordinaten darstellen. Mit  $r := |z|$  und  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  ist

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Dabei ist das Argument  $\varphi$  von  $z$  nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  bestimmt. Durch Einschränkung auf den Hauptwert  $0 \leq \varphi < 2\pi$  wird die Polardarstellung für alle Zahlen  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eindeutig.

Die Multiplikation zweier Zahlen  $z$  und  $w$  ist in Polardarstellung besonders einfach. Mit  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  und  $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$  erhält man

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i(\cos \varphi \sin \psi + \cos \psi \sin \varphi)) \\ &= |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)). \end{aligned}$$

Speziell gilt die Formel von de Moivre

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)). \quad (1.2)$$

**$\mathbb{C}$  als metrischer Raum** Bezüglich der durch den Abstand  $|\cdot|$  induzierten Metrik  $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$  in  $\mathbb{C}$  ist  $(\mathbb{C}, d)$  ein metrischer Raum. Es gelten also für alle  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) = 0 &\Leftrightarrow z_1 = z_2 \\ d(z_1, z_2) &= d(z_2, z_1) \\ d(z_1, z_3) &\leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \end{aligned}$$

Somit können wir sämtliche Begriffe des metrischen Raumes auch im Raum der komplexen Zahlen verstehen.

**Offene und abgeschlossene Mengen** Wir definieren die Offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $z$ , Radius  $r$ .

$$B(z, r) = B_r(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < r\}$$

und setzen speziell  $\mathbb{E} := B(0, 1)$ .

### Definition 1.1.2

- $U \subseteq \mathbb{C}$  heißt offen, falls zu jedem  $z \in U$  ein Radius  $r > 0$  existiert, so dass  $B(z, r) \subset U$  gilt.

- $A \subseteq \mathbb{C}$  heißt abgeschlossen, wenn das Komplement  $CA = \mathbb{C} \setminus A$  offen ist.
- Zu  $X \subset \mathbb{C}$  setzen wir:  
 $\overset{\circ}{X} = \bigcup_{U \subset X} U =$  Vereinigung aller offenen Teilmengen von  $X$  - Inneres von  $X$ .  
 $\overline{X} = \bigcap_{A \supseteq X} A =$  Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von  $X$  - Abchluss von  $X$ .  
 $\delta X = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X} =$  Der Rand von  $X$ .

## Konvergenz, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit

### Definition 1.1.3

1. Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  konvergiert gegen  $z \in \mathbb{C}$ , falls gilt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , so dass  $|z_n - z| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  erfüllt ist. Schreibweise:

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ oder } z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$$

2. Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge, falls gilt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , so dass  $|z_n - z_m| < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq N$ .

### Bemerkungen

- Eine Folge  $(z_n)$  in  $\mathbb{C}$  konvergiert gegen  $z \in \mathbb{C}$  (bzw. ist Cauchy-Folge), genau dann wenn die Folgen  $(\operatorname{Re}(z_n))$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))$  gegen  $\operatorname{Re}(z)$  bzw.  $\operatorname{Im}(z)$  konvergieren (bzw. wenn die Folgen  $(\operatorname{Re}(z_n))$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))$  Cauchy Folgen sind).
- Mit obiger Bemerkung sieht man sofort:  $\mathbb{C}$  ist vollständig, da  $\mathbb{R}$  vollständig ist.

## Zusammenhang in $\mathbb{C}$

### Definition 1.1.4

- Ein metrischer Raum  $X$  heißt zusammenhängend, falls gilt: Sind  $A, B$  nichtleer, offen in  $X$  mit  $A \cup B = X$ , so ist  $A \cap B \neq \emptyset$ .
- Eine beliebige Teilmenge  $Z \subset \mathbb{C}$  heißt zusammenhängend, falls  $Z$  als metrischer Raum, versehen mit der induzierten Metrik, zusammenhängend ist.

**Bemerkung**

- Äquivalent zur obigen Definition eines zusammenhängenden metrischen Raumes ist die folgende Charakterisierung:  
Ist  $Y \subseteq X$ ,  $Y$  offen und abgeschlossen in  $X$ , dann ist  $Y = \emptyset$  oder  $Y = X$ .
- In  $\mathbb{C}$  können wir zusammenhängende Mengen auch mithilfe von Streckenzügen charakterisieren.  
Zu zwei Punkten  $z, w \in \mathbb{C}$  ist  $[z, w] := \{tw + (1 - t)z : 0 \leq t \leq 1\}$  die Verbindungsstrecke von  $z$  und  $w$ . Als Streckenzug von  $a \in \mathbb{C}$  nach  $b \in \mathbb{C}$  bezeichnen wir die Menge

$$S = \bigcup_{k=1}^n [z_k, w_k], \quad z_1 = a, \quad z_{k+1} = w_k, \quad w_n = b, \quad 1 \leq k \leq n - 1$$

□

**Satz 1.1.5** Sei  $G$  offen in  $\mathbb{C}$ . Dann gilt:  $G$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow \forall a, b \in G$  existiert ein Streckenzug  $S \subset G$ , der  $a$  mit  $b$  verbindet.

**Beweis** Z.B. im Buch von Hans Bauer: Differential- und Integralrechnung.

□

**Definition 1.1.6** Eine nichtleere, offene, zusammenhängende Teilmenge  $G \subset \mathbb{C}$  heißt Gebiet.

**Definition 1.1.7 (Zusammenhangskomponente)** Eine Teilmenge  $D$  eines metrischen Raumes  $X$  heißt Zusammenhangskomponente von  $X$  falls gilt:

1.  $D$  ist zusammenhängend.
2.  $D \subset B \subset X$ ,  $B$  zusammenhängend  $\Rightarrow D = B$  (d.h.  $D$  ist maximal!)

□

**Bemerkungen**

1. Jeder Punkt  $x \in X$  eines metrischen Raumes liegt in einer Zusammenhangskomponente von  $X$ .
2. Verschiedene Zusammenhangskomponenten sind disjunkt.
3. Jeder metrische Raum zerfällt in Zusammenhangskomponenten.

- In  $\mathbb{C}$  gilt: Ist  $U \subset \mathbb{C}$  offen, so sind die Zusammenhangskomponenten von  $U$  auch offen in  $\mathbb{C}$ .
- In  $\mathbb{R}$  gilt mehr: Ist  $U \subset \mathbb{R}$  offen, so sind die Zusammenhangskomponenten von  $U$  offene Intervalle.  $U$  zerfällt also in höchstens abzählbar viele paarweise disjunkte, offene Intervalle.

□

### Kompaktheit

**Definition 1.1.8** Eine Teilmenge  $K \subset X$  eines metrischer Raumes  $X$  heißt kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung  $(U_j)_{j \in J}$ ,  $J \subset I$  endlich, existiert.

Die folgende Charakterisierung von kompakten Mengen in metrischen Räumen ist recht nützlich:

**Satz 1.1.9 (Bolzano-Weierstraß)**  $K \subset X$  ist genau dann kompakt, wenn jede Folge  $(x_n)_n$  in  $K$  eine in  $K$  konvergente Teilfolge besitzt. □

Für unsere Zwecke noch nützlicher, allerdings nicht in beliebigen metrischen Räumen gültig, ist der folgende Satz:

**Satz 1.1.10 (Heine-Borel)**  $K \subset \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}^n$ ) ist genau dann kompakt, wenn  $K$  abgeschlossen und beschränkt ist. □

**Stetigkeit** Da  $\mathbb{C}$  metrischer Raum ist mit Metrik  $(d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|)$ , können wir die Begriffe Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen  $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$  ganz einfach wie im metrischen Raum definieren:

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  beliebig,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  komplexwertige Funktion und  $z_0 \in D$ .

#### Definition 1.1.11

1.  $f$  heißt stetig in  $z_0 \in D$ , falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  für alle  $z \in D$  mit  $|z - z_0| < \delta$  gilt.
2.  $f$  heißt gleichmäßig stetig auf  $D$ , falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$  für alle  $z_1, z_2 \in D$  und  $|z_1 - z_2| < \delta$  gilt.

**Satz 1.1.12** Ist  $D \subset \mathbb{C}$  kompakt und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so ist  $f$  gleichmäßig stetig. □



Betrachten wir Folgen von Funktionen, so treten in natürlicher Weise verschiedene Konvergenzbegriffe auf, die wir in Zukunft noch benötigen werden.

**Definition 1.1.13** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  beliebig,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge von Funktionen auf  $D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ .

1.  $(f_n)$  heißt punktweise konvergent mit Grenzfunktion  $f$ , falls für jeden Punkt  $z_0 \in D$  gilt: Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  gilt.
2.  $(f_n)$  heißt gleichmäßig konvergent mit Grenzfunktion  $f$ , falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  und für alle  $z \in D$ .
3. Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen  $(f_n)_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktionenfolge:  $(f_n)$  konvergiert lokal gleichmäßig (oder kompakt) gegen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , falls  $(f_n)$  auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subset U$  gleichmäßig konvergiert.

□

Erwähnenswert ist der folgende

**Satz 1.1.14** Die Grenzfunktion  $f$  einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge  $(f_n)$  stetiger Funktionen  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig.

**Beweis** Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf jeder kompakten Menge ist  $f$  dort stetig, also auch auf  $U$ . □

Wir formulieren die Konvergenzbegriffe nun noch speziell für Funktionsreihen.

**Definition 1.1.15** Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k, f_k : D \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert gleichmäßig (lokal gleichmäßig) wenn die Folge der Partialsummen  $(s_n), s_n = \sum_{k=0}^n f_k$  gleichmäßig (lokal gleichmäßig) konvergiert.

□

Speziell in der Funktionentheorie benötigen wir den folgenden

**Satz 1.1.16 (Majorantenkriterium von Weierstraß)** Sei  $(f_k), f_k : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktionenfolge,  $(M_k)$  eine Folge positiver Zahlen mit der Eigenschaft  $|f_k(z)| \leq M_k, \forall z \in D, \forall k \in \mathbb{N}$ . Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  absolut und gleichmäßig.

Zum Beweis benötigen wir das Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. Notwendig und hinreichend für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge  $(f_n)$  gegen eine Funktion  $f$  ist die Bedingung:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N \quad \forall z \in D.$$

**Beweis** Absolute Konvergenz ist klar. Zur gleichmäßigen Konvergenz bemerken wir:

Für alle  $n, m \geq 0$  und alle  $z \in D$  gilt:

$$\left| \sum_{k=m+1}^n f_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k$$

Wegen  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k=m+1}^n M_k < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N$ . Somit gilt:

$$\left| \sum_{k=m+1}^n f_k(z) \right| < \varepsilon \quad \forall z \in D, \quad \forall n, m \geq N$$

$\Rightarrow$  (Cauchy-Kriterium, angewendet auf die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen)  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  konvergiert gleichmäßig.  $\square$

**Definition 1.1.17 (normale Konvergenz)** Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  von Funktionen  $f_k : U \rightarrow \mathbb{C}$  ( $U$  offen in  $\mathbb{C}$ ) heißt normal konvergent, wenn die Reihe auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subset U$  eine konvergente Majorante besitzt.

**Satz 1.1.18 (Kriterium von Weierstraß)** Normal Konvergenz  $\Rightarrow$  kompakte (lokal gleichmäßige) Konvergenz.  $\square$

**Bemerkung** Die Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ ist falsch.

**Beispiel: Geometrische Reihe in  $\mathbb{C}$**  Aus der Analysis I kennen wir bereits die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  für  $q \in \mathbb{R}$  und wissen: Die Reihe konvergiert für  $|q| < 1$  und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad (|q| < 1).$$

Für komplexe Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  gilt:

$$(1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$$

und somit (endliche geometrische Reihe in  $\mathbb{C}$ ):

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad (z \neq 1).$$

Da für  $|z| < 1$  gilt  $|z|^n \rightarrow 0$  bei  $n \rightarrow \infty$  folgt für  $|z| < 1$  die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad (|z| < 1).$$

Es gilt aber viel mehr: Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  konvergiert auf der Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  normal, also insbesondere lokal gleichmäßig. Ferner gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad (z \in \mathbb{E}).$$

**Beweis** Wir weisen die lokale gleichmäßige Konvergenz nach. Dazu sei  $K \subset E$  kompakt.  $(B(0, r))_{0 < r < 1}$  ist eine offene Überdeckung von  $K$ , es existiert eine endliche Teilüberdeckung von  $K$ ; in unserem Fall eine einzige Kreisscheibe  $B(0, \rho)$ ,  $0 < \rho < 1$  mit  $K \subset B(0, \rho)$ . Auf  $B(0, \rho)$  und damit auf  $K$  besitzt die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  die konvergente Majorante  $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$ , somit ist die Reihe normal konvergent.  $\square$

### Bemerkungen

- Die geometrische Reihe konvergiert nicht gleichmäßig auf  $\mathbb{E}$ .
- Zur normalen Konvergenz: Eine wichtige Rolle in der Analysis spielt die Stabilität einer Reihe gegen Umordnung. Die normale Konvergenz garantiert genau diese Umordnungsstabilität (im Gegensatz zur lokal gleichmäßigen Konvergenz).
- Gegenbeispiel zu „ $\Leftarrow$ “ im Kriterium von Weierstraß ist die Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z-k}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}.$$

$\square$

## 1.2 Holomorphe Funktionen

Wir werden in diesem Kapitel den Begriff der *komplexen Diffezierbarkeit* einführen. Eine in einem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  *holomorphe* Funktion ist dann eine solche, die in einer Umgebung von  $z_0$  komplex differenzierbar ist. Wir werden feststellen, dass „komplex differenzierbar“ stärker ist als „reell (total) differenzierbar“; um „wieviel“ stärker wird uns erst im Laufe der Vorlesung klar werden.

### 1.2.1 Differentiation im Komplexen

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplexwertige Funktion und  $z_0 \in U$  ein beliebiger Punkt. Analog zur Analysis auf der reellen Achse betrachten wir nun den komplexen Differenzquotienten:

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad \text{für } z \in U \setminus \{z_0\}. \quad (1.3)$$

Wir stellen die Frage nach der Existenz des Limes dieser Funktion bei  $z \rightarrow z_0$ .

**Definition 1.2.1 (komplexe Differenzierbarkeit)**  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  offen, heißt in  $z_0 \in U$  (komplex) differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. (Schreibweise oft:  $\frac{df}{dz}(z_0)$  statt  $f'(z_0)$ ). Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  in jedem Punkt  $z_0 \in U$  ( $U$  offen in  $\mathbb{C}$ ) komplex differenzierbar, so heißt  $f$  holomorphe Funktion.  $\square$

**Bemerkung** Bereits (1.3) deutet an, dass offenbar die Multiplikationsstruktur in  $\mathbb{C}$  „verantwortlich“ ist für die „Stärke“ des Begriffes „holomorph“. Im  $\mathbb{R}^2$  ( $z = (x, y)$  aufgefasst als Punkt im  $\mathbb{R}^2$ ) können wir (1.3) gar nicht hinschreiben!  $\square$

#### Beispiele

1.  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^2$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  und es gilt  $f'(z) = 2z$ . Denn:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} z + z_0 = 2z_0 \quad \text{für alle } z_0 \in \mathbb{C}.$$

2.  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto |z|^2$  ist komplex differenzierbar in 0:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 - 0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0.$$

Aber:  $f$  ist nirgends holomorph, denn  $f$  ist in keinem anderen Punkt außer 0 komplex differenzierbar.  $\square$

**Bemerkungen**

- Eine Funktion heißt holomorph im Punkt  $z_0 \in U$ , falls sie in einer Umgebung von  $z_0$  komplex differenzierbar ist.
- Die Funktion aus Beispiel 2 ist in 0 komplex differenzierbar, aber nicht holomorph.
- Komplex Differenzierbare Funktionen sind stetig, denn ( $z \neq z_0$ )

$$f(z) = \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow f'(z_0) < \infty} \overbrace{(z - z_0)}^{\rightarrow 0} + f(z_0) \rightarrow f(z_0) \text{ bei } z \rightarrow z_0.$$

- Wie im Reellen gilt:
  - Summen und Produkte holomorpher Funktionen  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  sind holomorph.
  - Ferner gilt

$$(f + g)' = f' + g', (fg)' = f'g + fg', (\lambda f)' = \lambda f' (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Für  $g(z) \neq 0, z \in U$  ist  $\frac{f}{g}$  holomorph auf  $U$ :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

□

**Beispiele**

- Für  $n \in \mathbb{N}$  beliebig gilt  $(z^n)' = nz^{n-1}$ .
- Jedes Polynom  $P_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  mit  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  und es gilt:

$$P'_n(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}.$$

- Rationale Funktionen  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $P, Q$  Polynome in  $\mathbb{C}$ , sind holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_i \mid Q(z_i) = 0\}$

□

Wie im Reellen können wir auch die komplexe Differenzierbarkeit anders charakterisieren. Es gilt der folgende

**Satz 1.2.2 (Charakterisierung komplexer Differenzierbarkeit)** Sei  $U \subset \mathbb{C}, z_0 \in U$ . Dann gilt:

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist in } z_0 \text{ komplex differenzierbar} \iff \begin{cases} \exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{C}, \text{ stetig in } z_0, \text{ mit} \\ f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z) \quad \forall z \in U \end{cases}$$

**Beweis**

„ $\Rightarrow$ “ Setze

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}.$$

Dann gilt  $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z) \forall z \in U$  und  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) = \varphi(z_0)$ , also ist  $\varphi$  in  $z_0$  stetig.

„ $\Leftarrow$ “  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ . Also ist  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar (und  $f'(z_0) = \varphi(z_0)$ ).

□

Mit dieser Charakterisierung komplexer Differenzierbarkeit können wir bequem die noch fehlende Differentiationsregel beweisen:

**Satz 1.2.3 (Kettenregel)** Seien  $f : U \rightarrow \mathbb{C}, g : V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $U, V$  offen in  $\mathbb{C}$  und  $g(V) \subset U$ . Dann ist auch

$$f \circ g : V \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(g(z))$$

holomorph und es gilt:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$$

**Beweis** Sei  $z_0 \in V, w_0 = g(z_0)$ . Da  $f$  in  $w_0$  differenzierbar ist folgt, dass eine in  $w_0$  stetige Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  existiert mit  $f(w) - f(w_0) = (w - w_0)\varphi(w) \forall w \in U$ . Ferner gilt  $\varphi(w_0) = f'(w_0)$ . Somit folgt:

$$\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \varphi(g(z)), \quad \forall z \in V \setminus \{z_0\}$$

Damit folgt:

$$(f \circ g)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \varphi(g(z)) \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{g'(z_0)} \underbrace{\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(g(z))}_{\varphi(w_0)} = g'(z_0)\varphi(w_0) = g'(z_0)f'(g(z_0))$$

□

## 1.2.2 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Zu  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir den Differentialquotienten ( $h \in \mathbb{C}$ )

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (1.4)$$

etwas genauer. Wir spalten  $f$  in Real- und Imaginärteil auf.  $f(z) = u(z) + iv(z)$  mit  $u = \operatorname{Re}(f)$  und  $v = \operatorname{Im}(f)$ , außerdem  $z_0 = x_0 + iy_0, h = t + is$ .

Nun schreiben wir den Differentialquotienten für verschiedene Richtungen aus. Setzen wir  $s = 0$  so erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + t) + iv(z_0 + t) - (u(z_0) + iv(z_0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Setzen wir andererseits  $t = 0$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + is) + iv(z_0 + is) - (u(z_0) + iv(z_0))}{is} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + s) - v(x_0, y_0)}{s} - i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0)}{s} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.5)$$

dann folgt aus den obigen Rechnungen offensichtlich

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z), \quad f'(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z), \quad (1.6)$$

für jeden Punkt  $z \in U$  einer holomorphen Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Außerdem gilt: Ist  $f$  komplex differenzierbar in  $z \in U$ , so existieren auch die partiellen Ableitungen von  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$  im Punkt  $z$  und es gelten die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z). \quad (1.7)$$

Angenommen  $u = \operatorname{Re}(f)$  und  $v = \operatorname{Im}(f)$  besitzen stetige Ableitungen 2. Ordnung (dies ist für jede holomorphe Funktion erfüllt, wie wir später noch sehen werden), dann gilt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0.$$

Eine analoge Rechnung für den Imaginärteil  $v = \operatorname{Im}(f)$ , somit  $\Delta v = 0$ . Damit erhalten wir aus den Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen:

**Folgerung 1** Ist  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so sind Realteil  $u$  und Imaginärteil  $v$  harmonisch auf  $U$ , das heißt sie erfüllen die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0, \Delta v = 0 \text{ auf } U.$$

□

**Folgerung 2** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend (also ein Gebiet),  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt:

$$f' = 0 \iff f = \text{const.}$$

**Beweis** Mit  $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$ . Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen ergeben somit:

$$\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0.$$

Also hat man

$$\Rightarrow u \equiv \text{const}, \quad v \equiv \text{const},$$

und somit  $f \equiv \text{const}$  auf  $U$ . Rückrichtung ist trivial.

□



### 1.2.3 Unterschied zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen deuten bereits an, dass komplexe Differenzierbarkeit viel mehr sein muss als reelle Differenzierbarkeit (aufgefasst als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ ). Dies wollen wir jetzt nochmal genauer betrachten.

Identifizieren wir  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$ ,  $z = x + iy = (x, y)$ , es läßt sich jede  $\mathbb{R}$ -Lineare (d.h.  $L(\lambda z) = \lambda L(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) Abbildung  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Hilfe einer Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  darstellen, also

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$L(1) = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a + ic, \quad L(i) = L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b + id. \quad (1.8)$$

Damit die Abbildung  $L$   $\mathbb{C}$ -Linear ist (d.h.  $L(\lambda z) = \lambda L(z) \forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ), muss mehr gelten, nämlich:

$$L(i) = L(1 \cdot i) = i \cdot L(1) \Leftrightarrow b + id = i(a + ic) = -c + ia \Rightarrow b = -c \text{ und } a = d.$$

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so ist  $L$   $\mathbb{C}$ -Linear. Gezeigt ist somit das folgende

**Lemma 1.2.4** Für eine Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Die durch  $A$  dargestellte Abbildung  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $\mathbb{C}$ -linear.
2. Es gilt:  $c = -b, d = a$ .

□

**Bemerkung** Sind für die Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  die Bedingungen  $c = -b, d = a$  erfüllt, so gilt (mit  $z = x + iy$ ):

$$\begin{aligned} L(z) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ cx + ay \end{pmatrix} \\ &= (ax - by) + i(cx + ay) = (a + ic)(x + iy). \end{aligned}$$

Das heißt  $L(z) = (a + ic)z$  (Multiplikation mit einer komplexen Zahl!).

□

Wir erinnern uns an den Begriff der totalen Differenzierbarkeit im  $\mathbb{R}^2$  (bzw.  $\mathbb{R}^n$ , Analysis II): Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, z_0 \in U, f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  heißt in  $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  reell total differenzierbar, wenn es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gibt, so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(z_0 + h) - f(z_0) - Lh\|}{\|h\|} = 0$$

gilt. Die komplexe Schreibweise dazu ist dann

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - Lh|}{|h|} = 0,$$

was äquivalent ist zu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - Lh}{h} = 0.$$

**Satz 1.2.5** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in U$ . Äquivalent sind die folgenden Aussagen:

1.  $f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar.
2.  $f$  ist in  $z_0$  reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

**Beweis** (1)  $\Rightarrow$  (2) Ist  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar so gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{h} = 0,$$

also (1.8) mit  $L = f'(z_0)$ . Somit ist  $f$  reell differenzierbar und die darstellende lineare Abbildung  $L$  ist  $\mathbb{C}$ -linear. Da  $L$  gegeben ist durch die Jacobi-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix},$$

folgen aus dem Lemma und der  $\mathbb{C}$ -Linearität die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) Nach Voraussetzung gilt (1.8) mit einer  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen  $\mathbb{C}$ -linear ist.  $L$  hat also die Gestalt

$$Lh = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\right)}_a + i \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)}_c h$$

mit (1.8) gilt also:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)h}{h} = 0.$$

Somit existiert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0),$$

d.h.  $f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar.

□

## 1.2.4 Die komplexe Exponentialfunktion

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir noch einen Blick auf eine der wichtigsten holomorphen Funktionen – die komplexe Exponentialfunktion – werfen. Dazu versuchen wir die reelle Exponentialfunktion mit ihren Eigenschaften holomorph auf die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  fortzusetzen. Wir erinnern uns an die Exponentialfunktion auf  $\mathbb{R}$ : Die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^x$  hat die folgenden Eigenschaften

- (1.)  $\exp$  ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$ .
- (2.)  $\exp$  genügt der Funktionalgleichung:  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .
- (3.)  $\exp$  besitzt die auf  $\mathbb{R}$  konvergente Taylorentwicklung

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nun übertragen wir dies auf die komplexe Ebene und beginnen mit (1.): Gesucht ist eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f'(z) = f(z) \forall z \in \mathbb{C}$  und  $f(0) = 1$ . Sei  $f = u + iv$ . Da  $f$  holomorph  $\Rightarrow f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ . Die Bedingung  $f' = f$  liefert

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \text{ und } \frac{\partial v}{\partial x} = v \text{ auf } \mathbb{C}.$$

Also

$$u(x, y) = A(y)e^x, v(x, y) = B(y)e^x.$$

Beachten wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so muss gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow A(y)e^x = B'(y)e^x \Leftrightarrow A(y) = B'(y) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow A'(y)e^x = -B(y)e^x \Leftrightarrow A'(y) = -B(y) \quad (1.10)$$

(1.9) und (1.10) ergeben  $A = -B' = -A''$ , also  $A + A'' = 0$ , außerdem  $A(0) = 1$  (denn wir fordern  $u(0, 0) = 1$ ) und  $A'(0) = -B(0) = 0$  (da  $v(0, 0) = 0$  gefordert ist). Somit folgt:

$$A(y) = \cos y \text{ und } B(y) = -A'(y) = \sin y.$$

Es liegt nahe, die komplexe Exponentialfunktion zu definieren als

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^z := e^x(\cos y + i \sin y), z = x + iy. \quad (1.11)$$

Dann gelten folgende Eigenschaften:

- (0.)
- $z \mapsto e^z$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$ .
  - $e^z$  stimmt auf  $\mathbb{R}$  mit der reellen Exponentialfunktion überein.
  - $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} > 0 \Rightarrow e^z$  besitzt in  $\mathbb{C}$  keine Nullstellen.
- (1.)  $\frac{d}{dz} e^z = e^z, e^0 = 1$
- (2.)  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- (3.)  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  konvergiert auf ganz  $\mathbb{C}$  absolut, gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen  $U \subset \mathbb{C}$  (also normal konvergent)

**Beweis**

(0.) ist klar (mit Herleitung).

(1.) ist klar (mit Herleitung), Alternativ:

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

(2.) Wir betrachten die holomorphe Hilfsfunktion (auf  $\mathbb{C}$ ):  $g(z) := e^{z_1+z_2-z}e^z$ . Es gilt:

$$g'(z) = -e^{z_1+z_2-z}e^z + e^{z_1+z_2-z}e^z = 0 \text{ auf } \mathbb{C} \Rightarrow g = \text{const},$$

$$g(z) \equiv g(0) = e^{z_1+z_2}, \text{ also } e^{z_1+z_2-z}e^z = e^{z_1+z_2} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Zu zeigen bleibt (3.):

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  hat die konvergente Majorante  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}$  auf  $\mathbb{C}$ . Also folgt mit dem Kriterium von Weierstraß die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz.

Etwas später werden wir zeigen, dass  $f$  holomorph ist und daher gliedweise differenziert werden darf (Potenzreihe!), also:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = f(z).$$

Außerdem gilt somit  $f(0) = 1$ . Wegen Eindeutigkeit des Anfangswertproblems folgt

$$f(z) = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

□

**Bemerkungen**

1.  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist periodisch. Es gilt:  $e^{z+2\pi ki} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ .
2. Mit Hilfe der Exponentialfunktion können wir Sinus und Kosinus definieren:

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Damit sind  $\sin z, \cos z$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  und sie stimmen auf  $\mathbb{R}$  mit  $\sin x$  und  $\cos x$  überein.

3. Beachte:  $\cos z, \sin z$  sind auf  $\mathbb{C}$  nicht beschränkt!

Es gilt für  $y \in \mathbb{R}$ :

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y, \quad \sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^y) = i \sinh y.$$

**Weiter**

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

Dies ist die Formel von Euler.

4. Mit Hilfe der Formel von Euler lassen sich sofort die Additionstheoreme für  $\sin$  und  $\cos$  einsehen:

Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$\begin{aligned} e^{i(z+w)} &= e^{iz} e^{iw} = (\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) \\ &= \cos z \cos w - \sin z \sin w + i(\sin z \cos w + \cos z \sin w) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{-i(z+w)} &= e^{-iz} e^{-iw} = (\cos z - i \sin z)(\cos w - i \sin w) \\ &= \cos z \cos w - \sin z \sin w - i(\sin z \cos w + \cos z \sin w) \end{aligned}$$

Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \cos(w+z) &= \cos w \cos z - \sin w \sin z \\ \sin(w+z) &= \sin w \cos z + \cos w \sin z. \end{aligned}$$

5. Für die Ableitungen von  $\cos, \sin$  erhalten wir:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z. \quad (1.12)$$

□

### 1.3 Komplexe Integration

- Definition 1.3.1**
1. Unter einem parametrisierten Weg in  $\mathbb{C}$  versteht man eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  (häufig bezeichnet mit  $z = z(t)$ ),  $a \leq t \leq b$ .  $\gamma$  heißt stetig differenzierbar parametrisierter Weg, falls  $\Re\gamma(t)$  und  $\Im\gamma(t)$  stetig differenzierbar sind.
  2. Zwei stetig differenzierbar parametrisierte Wege  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  heißen äquivalent, falls es eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  gibt mit  $\varphi' > 0$  und  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ .
  3. Ein stetig differenzierbarer Weg ist eine Äquivalenzklasse stetig differenzierbarer Wege.
  4. Zu einem stetig differenzierbaren Weg  $W$ , parametrisiert durch  $\gamma(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  heißt  $\gamma(a)$  Anfangspunkt und  $\gamma(b)$  Endpunkt.  
 $|w| := \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$  heißt Träger von  $W$ .  $W$  heißt geschlossen falls Anfangspunkt gleich dem Endpunkt ist.
  5. Ein stückweise stetig differenzierbarer Weg  $W$  ist ein  $n$ -Tupel stetig differenzierbarer Wege  $W_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) mit Endpunkt  $w_k =$  Anfangspunkt  $W_{k+1}$  ( $k = 1, \dots, n - 1$ ).

□

**Definition 1.3.2 (Komplexe Integration)** Sei  $W$  stetig differenzierbarer Weg, parametrisiert durch  $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $f : |W| \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion. Wir definieren das komplexe Kurvenintegral von  $f$  längs des Weges  $W$  durch

$$I := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_W f(z)dz, \quad (1.13)$$

mit  $a, b$  als Anfangs- bzw. Endpunkt des Weges,  $\dot{\gamma}(t) = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt}$ .

□

**Bemerkung**  $I$  ist wohldefiniert, denn  $I$  ist unabhängig von der Parametrisierung. Sei  $\tilde{\gamma}(\tau)$ ,  $c \leq \tau \leq d$  eine zweite Äquivalente Parametrisierung, somit existiert  $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  stetig differenzierbar mit  $\gamma(\varphi(\tau)) = \tilde{\gamma}(\tau)$ ,  $c \leq \tau \leq d$ . Mit Kettenregel  $\frac{d}{d\tau}(\gamma(\varphi(\tau))) = \dot{\gamma}(\varphi(\tau))\dot{\varphi}(\tau)$  folgt:

$$\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_c^d f(\gamma(\varphi(\tau)))\dot{\gamma}(\varphi(\tau))\dot{\varphi}(\tau)d\tau = \int_c^d f(\tilde{\gamma}(\tau))\tilde{\gamma}'(\tau)d\tau$$

□

**Beispiele**

1. Sei  $f(z) = z^2$ ,  $W_1 =$ Weg parametrisiert durch  $z(t) = t$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

$$\int_{W_1} z^2 dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

Sei  $W_2$  parametrisiert durch  $z(t) = e^{i(\pi-t)}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

$$\int_{W_2} z^2 dz = -i \int_0^\pi e^{2i(\pi-t)} e^{i(\pi-t)} dt = -i \int_0^\pi e^{3i(\pi-t)} dt = \frac{2}{3}$$

2. Sei  $f(z) = (z - z_0)^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  (für negative  $k$  definiert man auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ). Wähle als Weg die Kreislinie  $C$  mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $r > 0$ . Dann gilt

$$\int_C (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0, & k \neq -1 \\ 2\pi i, & k = -1 \end{cases}$$

**Beweis** Wähle Parametrisierung  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dann gilt:  $\dot{\gamma}(t) = rie^{it}$  und somit:

$$\begin{aligned} \int_C (z - z_0)^k dz &= \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} r e^{it} dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{it(k+1)} dt = \\ &= ir^{k+1} \int_0^{2\pi} (\cos(k+1)t + i \sin(k+1)t) dt = \\ &= ir^{k+1} \left( \int_0^{2\pi} \cos(k+1)t dt + i \int_0^{2\pi} \sin(k+1)t dt \right) = \begin{cases} 0, & k \neq -1 \\ 2\pi i, & k = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

**Bemerkungen**

- Das Integral aus Beispiel (2) spielt eine zentrale Rolle in der Funktionentheorie, wie wir später noch sehen werden.
- Für stückweise stetig differenzierbare Wege  $W = (W_1, \dots, W_n)$  setzt man

$$\int_W f(z) dz := \sum_{i=1}^n \int_{W_i} f(z) dz \quad (1.14)$$



3. Das komplexe Integral besitzt die folgende elementare Eigenschaften:

(a)  $\mathbb{C}$ -Linearität: Für beliebige  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $f, g : |W| \rightarrow \mathbb{C}$  gilt:

$$\int_W (af(z) + bg(z))dz = a \int_W f(z)dz + b \int_W g(z)dz \quad (1.15)$$

(b) Sei  $W = (W_1, W_2)$  mit Endpunkt  $W_1 = \text{Anfangspunkt } W_2$ : Mit der Schreibweise  $W = W_1 + W_2$  gilt dann

$$\int_{W_1+W_2} f dz = \int_{W_1} f dz + \int_{W_2} f dz. \quad (1.16)$$

(c) Bezeichnet  $-W$  den entgegengesetzten durchlaufenen Weg (das heißt ist  $W$  parametrisiert  $\gamma(t), a \leq t \leq b$ ), so ist  $-W$  parametrisiert durch  $t \mapsto \gamma((a-t) + b)$ , so gilt:

$$\int_{-W} f dz = - \int_W f dz \quad (1.17)$$

□

Weiterer Begriff: Reelles Kurvenintegral. Sei dazu  $W$  parametrisiert durch  $\gamma(t), a \leq t \leq b, \gamma(t) = x(t) + iy(t)$  und  $u : |W| \rightarrow \mathbb{R}$  stetige reelle Funktion. Wir setzen:

$$\int_W u(z)|dz| := \int_a^b u(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)|dt \quad (1.18)$$

Auch dieses Integral ist parametrisierungsunabhängig. Für  $u = 1$  erhalten wir

$$\int_W |dz| = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = L.$$

Also die  $L$  die Länge des Weges  $W$ . Es gilt die wichtige Abschätzung für  $f : |W| \rightarrow \mathbb{C}$  stetig:

$$\left| \int_W f(z)dz \right| \leq \int_W |f||dz| \quad (1.19)$$

**Beweis** Sei  $\gamma(t), a \leq t \leq b$  eine Parametrisierung von  $W$ . Wir setzen  $I := \int_W f dz$  und  $g(t) := f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t), a \leq t \leq b$ . Dann gilt

$$I = |I|e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$$

und somit folgt direkt

$$\begin{aligned} |I| &= Ie^{-i\theta} = e^{-i\theta} \int_a^b g(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} g(t) dt = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} g(t)) dt + i \underbrace{\int_a^b \operatorname{Im}(e^{i\theta} g(t)) dt}_II \end{aligned}$$

Es muss  $II = 0$  sein, da  $|I|$  reell ist. Da  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} g(t)) \leq |e^{-i\theta} g(t)| = |g(t)|$  folgt  $|I| \leq \int_a^b |g(t)| dt = \int_a^b |f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b |f| |dz|$ .

□

**Satz 1.3.3** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge stetiger Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion  $f$  konvergiert, und  $W$  ein stückweise stetiger Weg in  $U$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_W f_n dz = \int_W f dz \quad (1.20)$$

**Beweis** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass  $W$  stetig differenzierbar ist,  $\gamma(t), a \leq t \leq b$  Parametrisierung von  $W$ . Da  $|W|$  kompakt ist, konvergiert  $f_n$  auf  $|W|$  gleichmäßig, das heißt für ein beliebiges  $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall n \geq N \forall z \in |W|.$$

Also gilt  $\forall n \geq N$ :

$$\left| \int_W f_n dz - \int_W f dz \right| = \left| \int_W (f_n - f) dz \right| \leq \int_W |f_n - f| |dz| \leq \varepsilon \int_W |dz| = \varepsilon$$

Also die Länge von  $W$ .

□

### 1.3.1 Stammfunktion

**Erinnerung** Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

1. Jede stetige reelle Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt eine Stammfunktion  $F$ , das heißt es gilt  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar und es gilt  $F' = f$ .
2. Ist  $F$  Stammfunktion der stetigen Funktion  $f$ , so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1.21)$$

**Definition 1.3.4** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Stammfunktion zu  $f$ , falls  $F$  in jedem Punkt  $z \in U$  komplex differenzierbar ist (also  $F$  holomorph auf  $U$ ) und

$$F'(z) = f(z) \forall z \in U \quad (1.22)$$

gilt.

□

#### Beispiel

1.  $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}_0$  besitzt die Stammfunktion (auf  $\mathbb{C}$ ):

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

2.  $f(z) = z^{-n}, n \in \mathbb{N}$  ist definiert auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Für  $n \neq 1$  besitzt  $f$  die Stammfunktion  $F(z) = \frac{z^{1-n}}{1-n}$ . Für  $n = 1$  besitzt  $f$  keine Stammfunktion auf  $\mathbb{C}$  ohne 0.

**Satz 1.3.5** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $W$  ein stückweise differenzierbarer Weg in  $U$  mit Anfangspunkt  $z_0$  und Endpunkt  $z_1$ . Besitzt  $f$  auf  $U$  eine Stammfunktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so gilt:

$$\int_W f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) \quad (1.23)$$

Insbesondere folgt damit:

$$\int_W f(z)dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $W$  in  $U$ .

**Beweis** Sei  $F$  Stammfunktion zu  $f$ ,  $F = u + iv$  holomorph auf  $U$  mit  $F' = f$ , das heißt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{dF}{dz}(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \\ &= -i \left( \frac{\partial u}{\partial y}(z) + i \frac{\partial v}{\partial y}(z) \right). \end{aligned}$$

Sei nun  $\gamma(t), a \leq t \leq b$  eine Parametrisierung von  $W$  (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit stetig differenzierbar) dann berechnen wir mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) = \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \dot{y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} \right) = \\ &= \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dot{x}}_{f(\gamma(t))} + \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \dot{y}}_{if(\gamma(t))} = f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \end{aligned}$$

Somit folgt  $\int_W f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = F(z_1) - F(z_0)$ .

□

Mit diesem Satz sehen wir sofort, dass die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  keine Stammfunktion besitzen kann. Denn besäße  $f$  eine Stammfunktion, so wäre für jede Kreislinie  $C$  um  $0$   $\int_C f(z) dz = 0$  im Widerspruch zu  $\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$ .

□

**Bemerkung** Lokal, das heißt auf jeder Kreisscheibe besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion! Eng verwandt mit dieser Aussage ist der Cauchy-Integralsatz, den wir uns im folgenden überlegen wollen.

**Erinnerung** Satz von Gauß (Analysis II)

**Satz 1.3.6** Sei  $U \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  offen,  $w = (u, v)$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $U$  und  $G$  ein glatt (bzw. stückweise glatt) berandetes Gebiet mit  $\bar{G} \subset U$ . Dann gilt:

$$\int_G \operatorname{div}(w) dx dy = \int_{\partial G} \langle w, n \rangle ds \quad (1.24)$$

Mit  $n$ , der äußeren Einheitsnormalen und dem Vektorfeld  $G$ .

**Ziel** Übertragung ins Komplexe. Dazu zunächst die folgende Definition.

**Definition 1.3.7** Ein Gebiet  $G$  heißt positiv berandet, falls  $G$  stets links von  $\Gamma = \partial G$  liegt. Exakt formuliert: Für jede Randkomponente  $\Gamma_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) gilt: Ist  $\gamma_j(t)$  eine Parametrisierung des geschlossenen Weges  $\Gamma_j$ , so existiert zu jedem  $t_0 \in [0, 1]$  ein  $\delta_0 > 0$  mit folgenden Eigenschaften: Ist  $n_j(t_0) := i\dot{\gamma}_j(t_0)$  der Normalenvektor im Punkt  $t_0$ , dann gilt: Für alle  $0 < \lambda < \delta_0$ :  $\gamma_j(t_0) + \lambda n_j(t_0) \in G$ ,  $\gamma_j(t_0) - \lambda n_j(t_0) \notin G$ .

□

Wir betrachten  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f : u + iv$  reell stetig differenzierbar. Setzen wir  $w := (u, -v) = \bar{f}$ , so ist  $w$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld in  $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}$ . Sei  $G$  mit  $\bar{G} \subset U$  ein positiv berandetes Gebiet mit Rand  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ . Das äußere Einheitsnormalen-Vektorfeld zu  $G$  ist gegeben durch

$$n(t) = -i \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} (\dot{y} - i\dot{x}) = (n_1, n_2),$$

wobei  $n_1 = \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ ,  $n_2 = -\frac{\dot{x}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$  gilt. Wir betrachten die rechte Seite der Gleichung im Satz von Gauß:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} \langle w, n \rangle ds &= \int_0^1 (un_1 - vn_2) |\dot{\gamma}| dt = \int_0^1 (u\dot{y} + v\dot{x}) dt = \\ &= \operatorname{Im} \left( \int_0^1 (u + iv) \underbrace{(\dot{x} + i\dot{y})}_{\dot{\gamma}} dt \right) = \operatorname{Im} \left( \int_{\Gamma_i} f(z) dz \right) \end{aligned}$$

Die linke Seite berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\bar{f}) &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 2\Re \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \Rightarrow \int_G \operatorname{div}(\bar{f}) dx dy &= \operatorname{Re} \left( 2 \int_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy \right) = \operatorname{Im} \left( 2i \int_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy \right) \end{aligned}$$

Satz von Gauß:

$$\operatorname{Im} \left( 2i \int_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy \right) = \operatorname{Im} \left( \int_{\Gamma} f(z) dz \right) \tag{1.25}$$

Ersetzen  $f$  durch  $if$ , so besagt (1.25):

$$\underbrace{\operatorname{Im}\left(-2 \int_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy\right)}_{=\operatorname{Re}\left(2i \int_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy\right)} = \operatorname{Im}\left(i \int_\Gamma f(z) dz\right) = \operatorname{Re}\left(\int_\Gamma f(z) dz\right)$$

Zusammengenommen gilt:

$$2i \int_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \int_\Gamma f(z) dz \tag{1.26}$$

Im Fall, dass  $f$  holomorph ist, gilt (wg. Cauchy-Riemann):

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_0 + i \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_0 \right) = 0$$

Für holomorphe  $f$  ist also die linke Seite in (1.26)  $\equiv 0$  und wir erhalten  $\int_\Gamma f(z) dz = 0$ .

**Bemerkung** Für unsere Betrachtungen haben wir vorausgesetzt (und auch benötigt) dass die Ableitung  $f'$  stetig ist. Wir werden im folgenden sehen, dass obere Voraussetzung unnötig ist, da eine holomorphe Funktion automatisch beliebig oft differenzierbar ist - und viel mehr: Jede holomorphe Funktion analytisch ist. Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $G$  Gebiet mit  $\bar{G} \subset U$ , positiv orientierter Rand  $\Gamma = \partial G$ .

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0 \tag{1.27}$$

Zu  $f$  wie oben und  $z_0 \in G$  betrachten wir jetzt die Funktion  $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$  auf  $U \setminus \{z_0\}$ ,  $g$  ist holomorph und besitzt nach Voraussetzung an  $f$ , stetige Ableitung. Sei  $B(z_0, \rho)$  eine Kreisscheibe mit  $B(z_0, \rho) \subset G$  und setze  $G' = G \setminus B(z_0, \rho)$ ,  $G'$  ist positiv berandet, sofern  $\partial B$  negativ orientiert ist. Wir wenden (1.27) auf  $(g, \Gamma')$  statt  $(f, \Gamma)$  mit  $\Gamma' = \partial G'$  an und erhalten

$$0 = \int_{\Gamma'} g(z) dz = \int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

mit  $C_\rho = \partial B(z_0, \rho)$

$$\int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - f(z_0) \underbrace{\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-z_0}}_{2\pi i}$$

Da  $f$  stetig ist, gilt weiter:

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \int_{C_\rho} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| \leq \frac{1}{\rho} \sup_{C_\rho} |f(z) - f(z_0)| \underbrace{\int_{C_\rho} |dz|}_{2\pi\rho}$$

$$\Rightarrow \rightarrow_{\rho \rightarrow 0} 0$$

Damit erhalten wir

$$2\pi i f(z_0) = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad z_0 \leftrightarrow z, \quad z \leftrightarrow \xi,$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{1.28}$$

Mit Hilfe dieser Formel (der sogenannten Cauchy'schen Integralformel) können wir nun einsehen, dass jede holomorphe Funktion beliebig oft differenzierbar ist. Wir geben  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $U \subset \mathbb{C}$  offen vor. Auf jeder in  $U$  enthaltenen Kreisscheibe  $B(z_0, r)$  besitzt  $f$  eine Stammfunktion  $F$ . Wenden nun (1.28) auf  $F$  an:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \forall z \in B(z_0, \rho)$$

Wobei  $C_\rho$  die Kreislinie mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $0 < \rho < r$ . Der Kern  $z \mapsto \frac{1}{\xi - z}$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{\xi\}$  beliebig oft differenzierbar, mit Differentiation unter dem Integral folgt:  $F$  auf  $B(z_0, \rho)$  und da  $B(z_0, r)$  und  $0 < \rho < r$  beliebig waren, auf  $U$  beliebig oft komplex differenzierbar. Insbesondere ist  $f = F'$  beliebig oft differenzierbar auf  $U$ . □

Gezeigt sind somit:

**Satz 1.3.8 (Cauchy'scher Integralsatz)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $G$  mit  $\bar{G} \subset U$  ein positiv berandetes Gebiet mit (orientiertem) stückweise glatten Rand  $\Gamma$ . Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$
□

**Satz 1.3.9 (Cauchy'sche Integralformel)** Unter Voraussetzung des Cauchy'schen Integralsatzes gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \forall z \in G.$$
□

Indem wir unter dem Integral differenzieren folgt sofort:

**Korollar 1.3.10** *Unter der obigen Voraussetzung gilt für die  $n$ -te Ableitung von  $f$  die Formel*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad \forall z \in G. \quad (1.29)$$

Aus dem Cauchy-Integralsatz und der Integralformel ergeben sich direkt einige Konsequenzen für holomorphe Funktionen.

**Satz 1.3.11 (Cauchy'sche Abschätzung)** *Ist  $f$  auf  $U$  holomorph und beschränkt, das heißt  $|f(z)| \leq M, \forall z \in U$ , so gilt für die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$ :*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{\text{dist}(z, \partial U)^n} M, \quad \text{dist}(z, \partial U) = \inf_{\xi \in \partial U} |\xi - z|$$

**Beweis** Sei  $\delta = \text{dist}(z, \partial U)$ , dann ist  $B(z, \delta) \subset U$ . Wende Cauchy-Integralformel auf der Kreislinie  $C \equiv C(z, r)$  mit  $0 < r < \delta$  an.

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^{n+1}} |d\xi| \leq \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}} \int_C |d\xi| = \frac{n!M}{r^n}$$

Da  $0 < r < \delta$  beliebig war, folgt die Behauptung. □

**Satz 1.3.12 (Liouville)** *Jede auf ganz  $\mathbb{C}$  definierte holomorphe und beschränkte Funktion ist konstant!*

**Beweis** Aus Cauchy'schen Abschätzung für  $n = 1$  und mit  $r \rightarrow \infty$  folgt  $|f'(z)| = 0$  also  $f = \text{const}$ . □

## Folgerungen

**Satz 1.3.13 (Fundamentalsatz der Algebra)** *Jedes Polynom  $n$ -ten Grades ( $n \geq 1$ ) mit  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, (a_n \neq 0)$  mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  besitzt eine komplexe Nullstelle.* □

**Korollar 1.3.14** *Jedes Polynom  $n$ -ter Ordnung ( $n \geq 1$ ) mit  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, (a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0)$  besitzt in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen (mit Vielfachheiten), das heißt es läßt sich wie folgt faktorisieren:*

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n), z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$
□



## 1.4 Analytische Funktionen

Wir beschäftigen uns mit Potenzreihen und deren Eigenschaften. Wir werden sehen, dass sich jede holomorphe Funktion in eine Potenzreihe entwickeln lässt und dass umgekehrt jede durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion holomorph ist. Holomorphie ist also - kurz gesagt - äquivalent zur Analytizität.

### 1.4.1 Potenzreihen

Fakten über Potenzreihen (Analysis I/II). Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad (1.30)$$

heißt Potenzreihe mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$ , Entwicklungspunkt oder Mittelpunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Potenzreihen in  $\mathbb{C}$  haben ein leicht zu merkendes Konvergenzverhalten: Konvergiert (1.30) in einem Punkt  $z_1 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1 \neq z_0$ , so konvergiert die Reihe absolut auf  $B(z_0, |z_1 - z_0|)$  und auf jeder Kreisscheibe  $B(z_0, r)$  mit  $0 < r < |z_1 - z_0|$  sogar gleichmäßig. Dies sieht man sehr leicht mit dem Majorantenkriterium. Da die Reihe im Punkt  $z_1$  konvergiert, ist  $a_k(z_1 - z_0)^k$  eine Nullfolge, das heißt es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_k(z_1 - z_0)^k| \leq 1 \forall k \geq N$ . Damit hat man

$$|a_k(z - z_0)^k| \leq \underbrace{|a_k(z_1 - z_0)^k|}_{\leq 1} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^k, \quad \forall k \geq N.$$

Zu beliebigen  $0 < q < 1$  hat man für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| \leq q|z_1 - z_0|$  die Abschätzung  $|a_k(z - z_0)^k| \leq q^k \Rightarrow$  geometrische Reihe ist konvergente Majorante.  $\square$

Andererseits sieht man: Gibt es einen Punkt  $z_2$ , so dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (z_2 - z_0)^k$  divergiert, so divergiert sie auch in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ . Selbes Argument wie oben, nur Minorante statt Majorante.

**Satz 1.4.1 (Konvergenzverhalten von Potenzreihen)** Für jede Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  gilt entweder:

1. Sie konvergiert auf ganz  $\mathbb{C}$  absolut und gleichmäßig auf allen Teilmengen.
2. Es gibt eine Kreisscheibe  $B(z_0, R)$  mit  $0 < R < \infty$  so dass gilt: Die Potenzreihe konvergiert auf  $B(z_0, R)$  absolut und lokal gleichmäßig und sie divergiert auf dem Komplement der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\overline{CB(z_0, R)}$ .
3. Die Potenzreihe konvergiert nur in  $z = z_0$ .

$\square$

**Definition 1.4.2**  $R$  heißt Konvergenzradius der Potenzreihe im Fall 1 :  $R = \infty$ , im Fall 3 :  $R = 0$ .

□

**Bemerkung** Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| = R$  ist über Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe keine Aussage möglich.

### Beispiele

1.  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k, R = 1$  divergiert für alle  $z$  mit  $|z| = 1$ .
2.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, R = \infty$  - Exponentialfunktion.
3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, R = 1$  konvergiert für  $z = -1$  (Leibniz), divergiert für  $z = 1$  (harmonische Reihe).
4.  $\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k, R = 0$ .
5.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k, R = 1$ , denn  $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{(k+1)^2}} = 1$ .

**Satz 1.4.3 (Quotientenkriterium)** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Es sei  $a_k \neq 0$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \leq R \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ . Insbesondere gilt  $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$  sofern der Limes existiert.

□

Eine wichtige Eigenschaft von Potenzreihen ist, dass sie gliedweise differenziert und integriert werden dürfen.

**Satz 1.4.4** Besitzt die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  einen positiven Konvergenzradius  $R$ , so definiert sie auf dem offenen Konvergenzradius  $B(z_0, R)$  eine holomorphe Funktion  $f$ ; Zudem gilt:

1. Die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  wird dargestellt durch die Potenzreihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}. \quad (1.31)$$

Ihr Radius ist ebenfalls  $R$ .

2. Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$  besitzt ebenfalls Radius  $R$  und ist auf  $B(z_0, R)$  eine Stammfunktion von  $f$ .

**Beweis** Wir gehen Schrittweise vor.

**Behauptung** Hat die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  den Radius  $R$ , so hat auch die durch gliedweise Differentiation entstandene Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z - z_0)^{k-1}$  den Radius  $R$ .

Dazu setzen wir  $z_0 = 0$ , bezeichnen mit  $R$  den Radius von  $\sum a_k z^k$  und mit  $R'$  den Radius von  $\sum ka_k z^{k-1}$ . Es gilt  $R \geq R'$ :  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |z|^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| |z|^{k-1}$ . Zu zeigen bleibt:  $R \leq R'$ . Sei dazu  $r < R$ . Wir wählen  $s > 0$  so, dass  $r < \rho < R$ . Nach Voraussetzung konvergiert  $\sum |a_k| s^k$ , also ist  $|a_k| s^k$  eine Nullfolge. Setzen  $q = \frac{r}{s} < 1$  und stellen fest, dass

$$kq^k = \frac{k}{\left(\frac{1}{q}\right)^k} \rightarrow 0 \text{ bei } k \rightarrow \infty \text{ da } \frac{1}{q} > 1.$$

Somit ist auch  $k|a_k| r^{k-1} = r^{-1} \underbrace{(|a_k| s^k) (kq^k)}_{\text{Nullfolgen}}$  eine Nullfolge und daher insbesondere beschränkt. Für  $z$  mit  $|z| \leq \rho < r$  gilt daher:

$$\sum k|a_k| |z|^{k-1} = \sum k|a_k| r^{k-1} \left(\frac{|z|}{r}\right)^{k-1} \leq M \overbrace{\sum \left(\frac{\rho}{r}\right)^{k-1}}^{\text{geo. Reihe}} < \infty.$$

Also konvergiert  $\sum k|a_k| |z|^{k-1}$  auf  $B_r$  (da  $\rho < r$  beliebig war). Damit ist  $R' \geq r$  und da  $r < R$  beliebig war folgt  $R' \geq R \Rightarrow R' = R$ . □

Nun Zeigen wir Aussage 1 des Satzes, sowie die Holomorphie von  $f$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $z_0 = 0$  und  $n = 1$ , anschließend Induktion.

Bezeichne  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  und  $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^{k-1}$ .  $g$  hat, wie eben gezeigt, Radius  $R$  und ist somit auf  $B(0, R)$  wohldefiniert. Wir zeigen  $g = f'$ . Sei dazu  $b \in B(0, R)$ . Setze  $q_k(z) = z^{k-1} + z^{k-2}b + \dots + zb^{k-2} + b^{k-1}$ . Dann ist  $z^k - b^k = (z - b)q_k(z)$ . Also  $f(z) - f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z^k - b^k) = (z - b) \sum_{k=0}^{\infty} a_k q_k(z) =: (z - b)\tilde{f}(z)$ , mit  $\tilde{f}(b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q_k(b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k b^{k-1} = g(b)$ . Zu zeigen bleibt, dass  $\tilde{f}$  stetig ist. Denn dann ist  $f$  in  $b$  komplex differenzierbar und es gilt  $f'(b) = \tilde{f}(b) = g(b)$ . Wir verwenden das Kriterium von Weierstraß:

Sei  $r > 0$  so gewählt, dass  $|b| < r < R$ . Auf  $B(0, r)$  gilt dann

$$|q_k(z)| \leq |z^{k-1}| + |z^{k-2}| |b| + \dots + |z| |b^{k-2}| + |b^{k-1}| \leq kr^{k-1},$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k q_k(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| r^{k-1} < \infty.$$

Da  $g$  ebenfalls Radius  $R$  besitzt folgt dass  $\sum a_k q_k(z)$  auf  $B(0, R)$  lokal gleichmäßig konvergiert und somit  $\tilde{f}$  stetig ist.

□

**Bemerkungen**

1. Die Aussage 2 des Satzes folgt sofort, indem man die gesamte Argumentation auf die gleichweise integrierte Reihe anstatt der ursprünglichen Reihe anwendet.
2. Die Tatsache, dass Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis holomorphe Funktionen darstellen, folgt auch aus einem viel Allgemeineren Satz, den wir ohne Beweis angeben wollen.

**Satz 1.4.5 (Weierstraß)** Sei  $(f_k)$  eine Folge holomorpher Funktionen auf der offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$ , die lokal gleichmäßig (also kompakt) gegen eine Grenzfunktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert, dann ist auch  $f$  holomorph.

□

**Beispiel: Logarithmische Reihe**

$$f(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} \tag{1.32}$$

Wir stellen fest:  $f$  ist Potenzreihe mit Radius 1. Denn  $f'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k$  ist geometrische Reihe und hat Radius 1. Ferner gilt:  $f'(z) = \frac{1}{1+z}$  auf  $\mathbb{E}$ . Wir betrachten auf  $B(1,1)$  die Funktion  $\tilde{f}(z) = f(z - 1)$  dann gilt  $\tilde{f}'(z) = \frac{1}{z}$  und daher  $\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}$  holomorph auf  $B(1,1)$  mit der Eigenschaft  $\tilde{f}'(z) = \frac{1}{z}$ , das heißt  $\tilde{f}$  definiert auf  $B(1,1)$  eine Logarithmus-Funktion.

**1.4.2 Die Logarithmus-Funktion**

**Erinnerung (Analysis I)** Für positive Zahlen  $a$  ist  $\log a = \ln a$  wohldefiniert. Nehmen wir nun eine Komplexe Zahl  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , so ist  $b = \ln a$  nicht mehr eindeutig, denn mit  $a = |a|e^{i\varphi}$  und der Definition

$$\log a = \log |a| + i\varphi + k2\pi i, k \in \mathbb{Z} \tag{1.33}$$

gilt:

$$e^{\log a} = e^{\log |a| + i\varphi + k2\pi i} = |a|e^{i\varphi} \underbrace{e^{2\pi i}}_1 = a.$$

**Definition 1.4.6 (Zweig des Logarithmus)** Sei  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ein Gebiet. Die Funktion  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Zweig des Logarithmus* (bzw. *Logarithmusfunktion*), wenn gilt:

1.  $g$  ist stetig.
2. Für alle  $z \in G$  gilt:  $e^{g(z)} = z$ .

□

**Satz 1.4.7** Sei  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ein Gebiet,  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  ein Zweig des Logarithmus. Dann ist  $g$  holomorph und es gilt

$$g'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in G \tag{1.34}$$

Mit  $g$  ist auch  $\tilde{g} := g + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$  ein Zweig des Logarithmus. Zwei beliebige Zweige des Logarithmus unterscheiden sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi i$ .

□

**Lemma 1.4.8 (Umkehrsatz in  $\mathbb{C}$ )** Seien  $U, V \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  stetig mit  $g(V) \subset U$ . Ferner sei  $f(g(w)) = w \forall w \in V$  und  $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$ . Dann ist auch  $g$  holomorph und für alle  $w \in V$  gilt:

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \tag{1.35}$$

**Beweis** Direkte Anwendung der Kettenregel:

$$g = f^{-1} \Rightarrow g' = (f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

□

**Beweis des Satzes**  $U := \mathbb{C}, f(z) = e^z, V = G, g$  wie im Satz, also  $f(g(w)) = w$  für alle  $w \in G$ . Dann ist mit dem Lemma  $g$  holomorph und es gilt:

$$g'(w) = \frac{1}{e^{g(w)}} = \frac{1}{w}, \forall w \in G$$

Sind nun  $g_1, g_2$  Zweige des Logarithmus auf  $G$ ,  $h := g_1 - g_2$  erfüllt dann  $h'(z) = g_1'(z) - g_2'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = 0$  für alle  $z \in G$ .  $G$  Gebiet also folgt  $h \equiv \text{const.} \Rightarrow g_1(z) = g_2(z) + C$ . Mit  $z = e^{g_1(z)} = e^{g_2(z)}$  folgt  $\underbrace{e^{g_2(z)+C}}_{e^{g_2(z)}e^C} = e^{g_2(z)} \Rightarrow e^0 = 1, C = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$ .

□

Umgekehrt ist nun auch jede holomorphe Funktion  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g'(z) = \frac{1}{z} \forall z \in G$  für die ein Punkt  $a \in G$  die Eigenschaft  $e^{g(a)} = a$  hat, ein Zweig des Logarithmus, denn mit  $g$  ist auch

$$f(z) = ze^{-g(z)}, z \in G$$

holomorph und es gilt

$$f'(z) = e^{-g(z)} + ze^{-g(z)} \underbrace{(-g'(z))}_{=-\frac{1}{z}} = 0, \forall z \in G.$$

Also ist  $f$  konstant auf  $G$  und somit folgt für alle  $z \in G, z = Ce^{g(z)} \Rightarrow a = Ce^{g(a)} \Rightarrow C = 1$ . Also  $e^{g(z)} = z \forall z \in G$ . Somit ist  $g$  Zweig des Logarithmus.  $\square$

**Beispiel** Auf  $B(1, 1)$  definiert die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z-1)^k$$

einen Zweig des Logarithmus. Denn  $g$  ist holomorph und  $g'(z) = \frac{1}{z} \forall z \in B(1, 1)$ . Außerdem ist  $e^{g(1)} = e^0 = 1$ .

**Außerdem** Auf  $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  definiert

$$\log z := \log |z| + i \arg(z), -\pi < \arg(z) < \pi$$

einen Zweig des Logarithmus. Denn die Funktion ist holomorph und hat  $\frac{1}{z}$  als Ableitung. Eingeschränkt auf  $B(1, 1)$  haben wir somit zwei Zweige des Logarithmus. Da die beiden Zweige für  $z = 1$  übereinstimmen, stimmen sie auf ganz  $B(1, 1)$  überein, das heißt es gilt

$$\log z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z-1)^k \forall z \in B(1, 1). \tag{1.36}$$

**Bemerkung** Die Funktion  $\log : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $\log(z) = \log |z| + i \arg(z), -\pi < \arg(z) < \pi$  heißt Hauptzweig des Logarithmus.

Zu  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, Nullstellenfrei ( $U \subset \mathbb{C}$  offen) heißt in holomorphe Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  Zweig des Logarithmus von  $f$ , in Zeichen  $g = \log f$ , wenn gilt  $e^{g(z)} = f(z) \forall z \in U$ . Damit können wir nun auch die  $n$ -te Wurzel einer Funktion  $f$  definieren: Eine holomorphe Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Zweig der  $n$ -ten Wurzel von  $f$ , in Zeichen  $\sqrt[n]{f}$ , wenn gilt  $(g(z))^n = f(z) \forall z \in U$ . Die Existenz des

Logarithmus von  $f$ ,  $\log f$  (und diese ist immer für Nullstellenfreie holomorphe Funktionen  $f$  z.B. auf sternförmigen Gebieten garantiert) impliziert auch die Existenz von  $\sqrt[n]{f}$  (setzen einfach  $g(z) := e^{\frac{1}{n} \log f(z)}$ ).

□

### 1.4.3 Taylorentwicklung

Wir gehen jetzt der brennenden Frage nach, welche holomorphe Funktionen lokal durch Potenzreihen dargestellt werden können.

**Definition 1.4.9** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *analytisch*, wenn zu jedem Punkt  $z_0 \in U$  eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  mit positiven Konvergenzradius existiert, so dass in einer Umgebung von  $z_0$  die Potenzreihe mit der Funktion  $f$  übereinstimmt.

□

Wir wissen bereits:  $f$  analytisch  $\Rightarrow f$  holomorph

Um die Umkehrung zu zeigen, entwickeln wir den Cauchy-Kern  $z \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ ) um  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$  in eine Potenzreihe und wenden die Cauchy-Integralformel an.

Mit  $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$  und  $q = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$  haben wir also  $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - q}$ .

Auf der Kreisscheibe  $B = B(z_0, |\zeta - z_0|)$  ist  $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ , das heißt  $|q| < 1$ , also

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}. \quad (1.37)$$

Ist nun  $f$  auf  $B(z_0, \rho)$  holomorph, so gilt für  $0 < r < \rho$  die Cauchy-Formel, das heißt  $\forall z \in B(z_0, r)$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad C_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = r\}.$$

Setzen wir die Entwicklung des Cauchy-Kerns (1.37) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\zeta) (z - z_0)^k d\zeta, \quad g_k(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad \forall z \in B(z_0, r) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Dies gilt auch  $\forall z \in B(z_0, \rho)$ , da wir  $0 < r < \rho$  beliebig gewählt haben.

**Bemerkung** In (1.38) müssen wir streng genommen noch garantieren, dass Integration und Summation vertauscht werden können. Wir müssen also das Kriterium von Weierstraß ausnutzen.

□

**Satz 1.4.10 (Taylor-Entwicklung)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $z_0 \in U$  beliebig und  $\varrho = \text{dist}(z_0, \partial U)$  der Abstand von  $z_0$  zum Rand von  $U$ . Dann konvergiert die Potenzreihe gegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad (1.39)$$

(Taylorreihe) in jedem Punkt  $z \in B(z_0, \varrho)$  und stellt die Funktion  $f$  dar, das heißt es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \forall z \in B(z_0, \varrho). \quad (1.40)$$

□

## Beispiele

1. Die Exponentialreihe:  $f(z) = e^z$  hat die Taylorentwicklung in  $z_0$ :

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = e^{z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} = e^{z_0} e^{z - z_0}$$

Hierdurch ist auch ein alternativer Beweis für die Exponentialgleichung möglich.

2. Die Arcustangens Funktion:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \arctan(z)$  aus Analysis I. Entwickelt man  $f$  um  $x_0$  in  $\mathbb{R}$  in eine reelle Potenzreihe, so konvergiert diese auf dem Intervall  $I = (x_0 - \sqrt{1 + x_0^2}, x_0 + \sqrt{1 + x_0^2})$ . Man sieht, dass diese die Ableitung  $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$  besitzt, welche Singularitäten in den Punkten  $z = i, z = -i$  besitzt. Somit ist der Konvergenzradius  $R = \sqrt{1 + x_0^2}$  und es gilt  $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ .

**Satz 1.4.11** Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}, G \subset \mathbb{C}$  Gebiet holomorph und besitzt  $f$  eine Nullstelle im Punkt  $z_0 \in G$  so gilt folgende Alternative: Entweder ist  $f \equiv 0$  oder es existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $f^{(k)}(z_0) = 0$  für  $k = 0, \dots, n - 1$  und  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ .

□



**Definition 1.4.12** Die Zahl  $n$  mit der Eigenschaft aus den obigen Satz heißt Ordnung der Nullstelle  $z_0$  von  $f$  ( $\neq 0$ ). Die Nullstelle heißt einfach, wenn  $n = 1$  ist.

□

**Korollar 1.4.13 (Zum Satz von Taylor)** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen in  $\mathbb{C}$ , ist genau dann holomorph, wenn sie analytisch ist.

□

**Satz 1.4.14 (Charakterisierung von Nullstellen)** Hat  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ( $f \neq 0$ ) in  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $n$ , so gibt es eine holomorphe Funktion  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f_n(z_0) \neq 0$  und  $f(z) = (z - z_0)^n f_n(z) \forall z \in G$ .

**Beweisskizze** Der Satz von Taylor liefert in  $B(z_0, \rho)$ ,  $\rho = \text{dist}(z_0, \partial G)$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-n}$$

Setzen wir nun:

$$f_n(z) := \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-n}, & z \in B(z_0, \rho) \\ \frac{f(z)}{(z - z_0)^n}, & z \in G \setminus B(z_0, \rho) \end{cases}$$

So ist  $f_n$  holomorph auf  $G$  und  $f_n(z_0) \neq 0$  (denn  $f_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0$ ).

□

## Folgerungen

**Korollar 1.4.15 (Isoliertheit der Nullstellen)** Sei  $f$  holomorph in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $f \neq 0$  mit Nullstelle  $z_0 \in G$ . Dann existiert eine Umgebung  $V \subset G$  um  $z_0$ , welche außer  $z_0$  keine Nullstelle von  $f$  enthält.

**Beweis** Direkt mit obiger Darstellung  $f(z) = (z - z_0)^n f_n(z)$  stetig, da holomorph,  $f_n(z_0) \neq 0$  also auch in einer Umgebung von  $z_0$ .

**Anwendung: Identitätssatz** Seien  $f, g$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorph. Gilt  $f(z_k) = g(z_k)$  für alle Punkte einer Folge  $\{z_k\}$  mit Häufungspunkt in  $G$ , so muss  $f \equiv g$  sein.

□

**Beispiele**

1. Die reellen Funktionen  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ , etc. lassen sich in eindeutiger Weise holomorph auf  $\mathbb{C}$  fortsetzen.
2.  $z \mapsto \sin \frac{1}{z}$  holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und verschwindet in  $z_k = \frac{1}{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dies ist kein Widerspruch zum Identitätssatz, da zwar  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$ , aber  $0 \notin \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Also: Auf die Bedingung „Häufungspunkt in  $G$ “ kann nicht verzichtet werden.

□

**1.5 Isolierte Singularitäten - Laurent-Reihen**

Wir betrachten nun Funktionen, die „Singularitäten“ in isolierten Punkten haben können, und somit holomorph sind.

**Ziel** Charakterisierung verschiedener Typen von Singularitäten.

**1.5.1 Der Riemann'sche Fortsetzungssatz**

**Definition 1.5.1** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $A \subset U$ .

1. Ein Punkt  $a \in A$  heißt isolierter Punkt von  $A$ , wenn es eine Umgebung  $V \subset U$  von  $a$  gibt mit  $V \cap A = \{a\}$ .
2. Eine Menge  $A$  heißt diskret in  $U$ , wenn alle Punkte von  $A$  isoliert sind.
3. Eine holomorphe Funktion  $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subset U$  abgeschlossen, heißt holomorph in  $A$  fortsetzbar, falls es eine holomorphe Funktion  $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $\hat{f}|_{U \setminus A} = f$ .

□

**Satz 1.5.2 (Fortsetzungssatz von Riemann)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $A \subset U$  diskret und abgeschlossen. Sei  $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist holomorph nach  $A$  fortsetzbar.
2.  $f$  ist stetig nach  $A$  fortsetzbar.
3. Zu jedem  $a \in A$  existiert eine Umgebung  $V \subset U$  von  $a$ , so dass  $f$  auf  $V \setminus \{a\}$  beschränkt ist.
4.  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0 \forall a \in A$ .

**Beweis** (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) ist trivial. Betrachten wir nun (3) $\Rightarrow$ (4) - dies folgt aus

$$|(z - a)f(z)| = |z - a|f(z) \leq |z - a|M, \quad M := \sup |f(z)| < \infty, z \in V \setminus A.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) - Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $A = \{a\}, a = 0$ . Wir setzen:

$$h(z) := \begin{cases} z^2 f(z), & z \in U \setminus \{0\} \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Dann ist  $h$  komplex differenzierbar in 0 (nachrechnen!) und somit holomorph auf  $U$ . Es gilt  $h(0) = h'(0) = 0$ ,  $h$  hat also Nullstelle der Ordnung  $n \geq 2$  und es existiert somit  $\hat{f}$  holomorph auf  $U$  mit

$$h(z) = z^2 \hat{f}(z).$$

Aus  $h(z) = z^2 f(z)$  auf  $U \setminus \{0\}$  folgt  $\hat{f}(z) = f(z) \forall z \in U \setminus \{0\}$ , das heißt  $\hat{f}$  ist die gesuchte holomorphe Fortsetzung von  $f$ .

□

**Definition 1.5.3** Ist  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}, a \in U$  in keiner Umgebung von  $a$  beschränkt (also nicht holomorph nach  $a$  fortsetzbar), so heißt  $a$  isolierte Singularität.

□

## 1.5.2 Klassifikation isolierter Singularitäten

**Definition 1.5.4** Sei  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ( $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $a \in U$ )

1.  $a$  heißt hebbare Stelle von  $f$ , wenn  $f$  nach  $a$  holomorph fortsetzbar ist.
2.  $a$  heißt Polstelle von  $f$ , wenn gilt  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ . Das heißt zu beliebigen  $\eta > 0$  existiert eine Umgebung  $V \subset U$  von  $a$  derart, dass

$$|f(z)| > \eta, \forall z \in V \setminus \{a\}.$$

3.  $a$  heißt wesentliche Singularität von  $f$ , wenn  $a$  weder hebbar noch Polstelle ist.

□

**Satz 1.5.5 (Charakterisierung von Polstellen)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $a \in U$ ,  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $a$  ist Polstelle von  $f$ .
2. Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , sowie eine holomorphe Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(a) \neq 0$ , derart dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}, \forall z \in U \setminus \{a\}. \quad (1.41)$$

□

**Definition 1.5.6** Die eindeutig bestimmte Zahl  $n$  heißt Ordnung des Pols. Bei  $n = 1$  ist die Polstelle einfach.

□

### Beispiele

- Sind  $f, g$  beide analytisch bei  $z_0 \in U$  und hat  $f$  eine  $k$ -fache,  $g$  eine  $m$ -fache Nullstelle, so hat die Funktion  $\frac{f}{g}(z)$  in  $z_0$  eine hebbare Singularität falls  $k \geq m$ , eine Polstelle der Ordnung  $m - k$ , falls  $m > k$  gilt.
- $\sin(z)$  hat bei  $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  einfache Nullstelle, also hat die Funktion  $\frac{1}{\sin(z)}$  dort einfache Polstellen.
- Die Funktion  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist nicht beschränkt in einer Umgebung von 0, denn  $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty$  bei  $x \rightarrow 0$  hat also auch keine Polstelle in 0, denn  $|f(it)| = |e^{\frac{1}{it}}| = |e^{-\frac{1}{i}t}| = 1, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Also ist  $z = 0$  wesentliche Singularität.

Wir betrachten die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion  $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!}$ . Setzen wir statt  $z$  die Zahl  $\frac{1}{z}$  ein, so haben wir

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k}.$$

Offensichtlich konvergiert diese unendliche Reihe für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Dies führt uns auf den Begriff der Laurent-Reihe.

### 1.5.3 Laurent-Reihe

**Definition 1.5.7** Eine Reihe der Form  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  heißt *Laurent-Reihe*. Die Reihe  $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k$  heißt *Hauptteil* und die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  *Nebenteil* der Laurent-Reihe. Die Laurent-Reihe heißt *konvergent*, falls Haupt- und Nebenteil konvergent sind.

**Bemerkung** Der Hauptteil ist eine Komposition der holomorphen Abbildung  $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}, \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \zeta^k$ . Wir stellen folgendes fest: Besitzt diese Potenzreihe den Radius  $\frac{1}{r}$  ( $0 \leq r \leq \infty$ ) so konvergiert der Hauptteil  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (\frac{1}{z-z_0})^k$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r}$ , das heißt  $|z - z_0| > r$  und divergiert für  $|z - z_0| < r$ . Besitzt der Nebenteil der Reihe den Konvergenzradius  $R > r$ , so konvergiert die Laurent-Reihe im Kreisring  $A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ .

**Satz 1.5.8 (Entwicklungssatz von Laurent)** Jede im Kreisring  $A_{r,R}(z_0), 0 \leq r \leq R \leq \infty$  holomorphe Funktion  $f$  ist in  $A_{r,R}(z_0)$  in eine Laurent-Reihe entwickelbar.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad z \in A_{r,R}(z_0) \quad (1.42)$$

Die Koeffizienten  $a_k, k \in \mathbb{Z}$  sind eindeutig bestimmt durch die Formel

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi, \quad (1.43)$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $C_\rho$  eine Kreislinie mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $\rho$  ( $r < \rho < R$ ).

Zum Beweis benötigen wir den

**Satz 1.5.9 (Cauchy-Integralformel für Kreisinge)** Ist  $f$  holomorph auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und ist der abgeschlossene Kreisring  $\bar{A}_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}, 0 < r < R < \infty$  ganz in  $G$  enthalten, dann gilt für alle  $z \in A_{r,R}(z_0)$  (offener Kreisring  $r < |z - z_0| < R$ ) die Formel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad C_\rho = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| = \rho\}. \quad (1.44)$$

**Beweisskizze des Laurent-Reihen-Entwicklungssatzes** Wir entwickeln im 1. Integral der Cauchy-Integralformel:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n,$$

für  $|z - z_0| < |\xi - z_0| = R$  und im zweiten Integral

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{\frac{\xi - z_0}{z - z_0} - 1} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n = -\frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n,$$

für  $|z - z_0| > |\xi - z_0| = r$ . Insgesamt haben wir durch Kombination der beiden Gleichungen die Formel:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\right)}_{=: a_n} (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\right)}_{=: a_n} (z - z_0)^n.$$

Für alle  $z$  mit  $r < |z - z_0| < R$ . Dass man in beiden Integralen integrieren kann folgt aus der Cauchy-Integralformel. □

### Beispiele

1.  $\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{(-k)!} z^k \Rightarrow a_n = a_0 = 1, a_n = a_k = \frac{1}{(-k)!}$ .
2. Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{1; 2\}$ . Partialbruchzerlegung liefert:  $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ .

(a) Entwicklung auf  $B(0, 1)$ :

$$f(z) = -1 \frac{1}{2(1 - \frac{z}{2})} + \frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 2^{-k-1}) z^k.$$

Dies ergibt also eine Potenzreihe.

(b) Entwicklung im Kreisring  $A_{1,2}(0)$ :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= -\frac{1}{2(1 - \frac{z}{2})} - \frac{1}{z(1 - \frac{1}{z})} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \\
 &= -\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} z^k = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k, a_k = \begin{cases} -1, & k < 0 \\ -2^{-(k+1)}, & k \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dies ergibt also eine Laurentreihe.

(c) Entwicklung im Ring  $A_{2,\infty}(0) = \overline{CB(0, 2)}$ :

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{z(1 - \frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k-1} - 1) z^{-k}.$$

Der Nebenteil dieser Laurentreihe verschwindet also!

**Satz 1.5.10 (Charakterisierung isolierter Singularitäten)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $a \in U$  und  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $\rho = \text{dist}(a, \partial U)$  und  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - a)^k$  die Laurentreihe von  $f$  im Kreisring  $B(a, \rho) \setminus \{a\} = A_{0,\rho}(a)$ . Dann gilt:

1.  $a$  ist hebbare Stelle  $\Leftrightarrow a_{-k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ .
2.  $a$  ist Polstelle  $n$ -ter Ordnung  $\Leftrightarrow a_{-k} = 0 \forall k > n, a_n \neq 0$ .
3.  $a$  ist wesentliche Singularität  $\Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$  für unendlich viele  $k \in \mathbb{N}$ .

**Beweis**

1. Ist klar, da die Laurentkoeffizienten eindeutig bestimmt sind.
2.  $a$  ist Polstelle  $n$ -ter Ordnung von  $f$ , genau dann wenn ein eindeutiges  $g$  existiert,  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n}, g(a) \neq 0.$$

Ist  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_{n-1}(z - a)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - a)^k$  mit  $c_0 \neq 0$  so folgt:

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - a)^n} + \dots + \frac{c_{n-1}}{z - a} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^{k-n}}_{\text{Potenzreihe}}.$$

3. Trivial.

□

**Bemerkung** Ein wichtiger Unterschied zwischen Potenzreihen und Laurentreihen ist der, dass letztere im Allgemeinen keine Stammfunktion besitzen. Der Grund ist, dass Laurentreihen den Summand  $a_{-1}(z-a)^{-1}$  besitzen. Dies werden wir im nächsten Kapitel näher untersuchen.

## 1.6 Der Residuensatz

Ist  $f$  eine holomorphe Funktion auf  $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ , so lässt sich das Integral von  $f$  über den (einfach positiv durchlaufenden) Kreisweg um  $z_0$  mit Radius  $\delta \in (0, \varepsilon)$  sehr einfach ausrechnen, denn wir können die Laurentreihe  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  gliedweise integrieren (dies ist erlaubt, da die Reihe gleichmäßig konvergiert!):

$$\int_{C_\rho} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{C_\rho} (z-z_0)^n dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Denn, wie bereits bekannt, verschwinden alle Summanden außer  $n = -1$ . Es kommt also bei der Berechnung von Wegintegralen um isolierte Singularitäten überhaupt nur auf einen einzigen Koeffizienten  $a_{-1}$  an aus der Laurentreihe an. Dies rechtfertigt einen eigenen Namen für diesen Koeffizienten.

**Definition 1.6.1 (Residuum)** Der Koeffizient  $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(z) dz$  (mit  $C_\rho$  der Kreislinie um  $a$  mit  $\overline{B(a, \rho)} \subset U$ ) der Laurentreihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$  zur Funktion  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  (mit  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f$  holomorph) heißt Residuum von  $f$  in  $a$ , in Zeichen:

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_a f \tag{1.45}$$

□

Zur Berechnung von Integralen ist das Residuum einer Funktion offenbar entscheidend. Daher ist es sinnvoll Regeln zur Berechnung des Residuums zu kennen.

**Satz 1.6.2 (Rechenregeln für das Residuum)** Seien  $f, g : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ( $U \subset \mathbb{C}$  offen),  $a \in \mathbb{C}$ . Dann gelten die folgenden Regeln:

1.  $\operatorname{Res}_a(f + g) = \operatorname{Res}_a f + \operatorname{Res}_a g, \operatorname{Res}_a(\lambda f) = \lambda \operatorname{Res}_a f, (\lambda \in \mathbb{C})$ .
2. Ist  $a$  ein einfacher Pol von  $f$ , so gilt:

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$



3. Hat  $f$  in  $a$  eine Polstelle  $m$ -ter Ordnung ( $m \in \mathbb{N}$ ), das heißt es gilt  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ ,  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $g(a) \neq 0$  so gilt:

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

### Beweis

1. Ist klar.
2. Aus  $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$  mit  $g$  holomorph,  $g(a) \neq 0$  folgt:

$$f(z) = \frac{1}{z-a}(g(a) + (z-a)g'(a) + \dots) = \frac{g(a)}{z-a} + g'(a) + \dots$$

Also  $\operatorname{Res}_a f = g(a)$ , aber  $g(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$ !

3. Sei  $g(z) = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_m(z-a)^m + \dots$  die Potenzreihenentwicklung von  $g$  um  $a$ . Dann ist  $f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-a} + a_m + \dots$ . Somit folgt  $\operatorname{Res}_a f = a_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$ .

□

**Bemerkung** Regel 2 läßt sich wie folgt anwenden: Sei  $g, h$  holomorph auf  $U$ ,  $g(a) \neq 0, h(a) = 0, h'(a) \neq 0$  für ein  $a \in U$ . Dann gilt für  $f := \frac{g}{h}$  definiert auf  $U \setminus \{\text{Nullstellen von } h\}$ :

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Begründung:

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

□

### Beispiele

1.  $f(z) = \frac{z}{z^2-1}, z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$  hat einfache Pole in  $-1, 1$ . Mit Regel 2 folgt nun:

$$\operatorname{Res}_1 f = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{(z+1)(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2} = \operatorname{Res}_1 f.$$

2.  $f(z) = \frac{e^z}{z^k}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, g(z) = e^z$  - mit Regel 3 ( $a = 0, m = k$ ) folgt nun:

$$\operatorname{Res}_0 f = \frac{(e^z)^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = \frac{e^z|_{z=0}}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!}.$$

3.  $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^2}, z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, g(z) = \cos \pi z, g'(z) = -\pi \sin \pi z$  - mit Regel 3 ( $a = 1, m = 2$ ) folgt nun:

$$\operatorname{Res}_1 f = \frac{g'(1)}{1!} = \frac{-\pi \sin \pi}{1} = 0.$$

Das Residuum ist verantwortlich für die Existenz einer Stammfunktion.

**Satz 1.6.3 (Existenz einer Stammfunktion)** Sei  $f$  holomorph im Ring  $A_{r,R}(z_0)$ . Dann gilt:  $f$  besitzt genau dann eine Stammfunktion  $F$  in  $A_{r,R}(z_0)$ , wenn der Koeffizient  $a_{-1}$  in der Laurententwicklung von  $f$  in  $z_0$  verschwindet.

**Beweis** Sei  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$  die Laurententwicklung von  $f$ . Gilt  $a_{-1} = 0$ , so kann man die Reihe formal integrieren:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty, k \neq -1}^{\infty} a_k \frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1}.$$

Diese Reihe besitzt den selben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.  $F$  ist  $A_{r,R}(z_0)$  holomorph. Da  $F'(z) = \sum_{k=-\infty, k \neq -1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = f(z)$  ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Umgekehrt: Besitzt  $f$  eine Stammfunktion  $F$ , so gilt:

$$2\pi i a_{-1} = \int_{C_\rho} f(\xi) d\xi = 0 \quad (1.46)$$

□

Wir wollen nun beliebige Wege betrachten, die eine Singularität von  $f$  zum Beispiel auch mehrmals umlaufen können. Zu erwarten ist, dass dann der Beitrag zum Integral über  $f$  entsprechend oft zu nehmen ist, bzw. dass sich Umläufe um eine Singularität, die in entgegengesetzter Richtung erfolgen, im Integralbeitrag aufheben. Um dies genauer fassen zu können, wollen wir uns zunächst damit beschäftigen, was wir unter „Umlaufen“ einer Singularität genauer verstehen wollen.

### 1.6.1 Die Umlaufzahl (Indexfunktion)

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein geschlossener (stückweise stetig differenzierbarer) Weg in  $\mathbb{C}$ ,  $|\gamma| = \gamma([0, 1])$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ .

**Definition 1.6.4** Die Zahl

$$\text{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (1.47)$$

heißt die Umlaufzahl (bzw. der Index) von  $\gamma$  bezüglich  $z$ . Die Menge  $\text{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| : \text{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$  heißt Inneres von  $\gamma$ , die Menge  $\text{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| : \text{ind}_\gamma(z) = 0\}$  heißt Äußeres von  $\gamma$ . Offensichtlich gilt  $\mathbb{C} = \text{Int}(\gamma) \cup |\gamma| \cup \text{Ext}(\gamma)$ .

□

Zunächst ist überhaupt nicht klar, dass die so definierte Größe ganzzahlig ist und die erwarteten Eigenschaften einer Umlaufzahl hat.

**Satz 1.6.5** Sei  $\gamma$  ein beliebiger geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$ . Dann gilt:

1. Für jede Teilmenge von  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$  ist  $\text{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ .
2. Die Funktion  $\text{ind}_\gamma(z)$  ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$  und verschwindet auf der unbeschränkten Komponente von  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ .
3.  $\text{ind}_{-\gamma}(z) = -\text{ind}_\gamma(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ .

Zum Beweis des Satzes benötigen wir einen Hilfssatz.

**Satz 1.6.6** Sei  $G$  ein Gebiet  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und Nullstellenfrei. Sei  $\gamma$  ein Weg in  $G$  mit Anfangspunkt  $z_0$  und Endpunkt  $z_1$ . Dann gilt:

$$f(z_1) = f(z_0) \exp\left(\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi\right). \quad (1.48)$$

**Korollar 1.6.7** Ist  $f$  holomorph und nullstellenfrei auf dem Gebiet  $G$  und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $G$ , so gilt

$$\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.49)$$

Denn nach dem Hilfssatz ist  $\exp\left(\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi\right) = 1$ .

□

**Beweis des Hilfssatzes** Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ . Da der Träger kompakt ist, existieren Kreisscheiben  $B_1, \dots, B_n$  welche  $|\gamma|$  überdecken. Sei  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ . Eine Unterteilung von  $[0, 1]$  derart, dass jeder Bogen  $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  in einer Kreisscheibe  $B_j, j \in \{1, \dots, n\}$  liegt. Da  $f$  auf  $B_j$  keine Nullstelle besitzt, existiert ein Zweig des Logarithmus von  $f$  auf  $B_j$ . Also

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi &= \int_{\gamma_k} \frac{d}{d\xi}(\log(f)) d\xi = \log(f(\gamma(t_k))) - \log(f(\gamma(t_{k-1}))) \\ \Rightarrow \exp\left(\int_{\gamma_k} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi\right) &= \frac{f(\gamma(t_k))}{f(\gamma(t_{k-1}))} \\ \Rightarrow \exp\left(\int_{\gamma} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f'}{f} d\xi\right) = \prod_{k=1}^n \exp\left(\int_{\gamma_k} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi\right) = \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{f(\gamma(t_k))}{f(\gamma(t_{k-1}))} = \frac{f(\gamma(1))}{f(\gamma(0))} = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}. \end{aligned}$$

□

**Beweis des Satzes**

1. Sei  $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$  beliebig. Wähle  $G := \mathbb{C} \setminus \{z\}$  und  $f(\xi) = \xi - z, \xi \in G$ . Dann ist  $f$  holomorph und Nullstellenfrei. Mit dem vorherigen Korollar folgt:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\xi - z} d\xi = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Wir wissen  $z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\xi - z} d\xi$  ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$  und damit erst recht stetig. Da die Abbildung nur ganzzahlige Werte annimmt, muss sie auf jeder Zusammenhangskomponente konstant sein. Um zu zeigen, dass der Index auf der unbeschränkten Komponente von  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$  gleich Null ist, schätzen wir ab:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} \right| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{|d\xi|}{|\xi - z|} \leq \frac{\text{Länge von } |\gamma|}{2\pi \text{dist}(\gamma, z)} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0.$$

3. Trivial.

□

**Definition 1.6.8** 1. *Der Begriff der Kette* Seien  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  Wege in  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Wir versehen jeden Weg mit einer ganzen Zahl (die besagt, wie oft der Weg durchlaufen wird;  $-\gamma$  bezeichnet dabei den entgegengesetzt durchlaufenen Weg). Das System

$$\Gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \dots + n_m\gamma_m, n_k \in \mathbb{Z}, \quad (1.50)$$

heißt Kette.

2. *Der Begriff des Zyklus* Eine Kette  $\Gamma = \sum_{k=1}^m n_k\gamma_k$  heißt Zyklus (bzw. geschlossene Kette), wenn jeder Punkt, unter Berücksichtigung der Vielfachheit  $n_k$  ebenso oft als Anfangspunkt eines  $\gamma_k$  wie als Endpunkt eines  $\gamma_k$  auftritt.

□

### Beispiele

1. Jeder geschlossene Weg ist ein Zyklus. Allgemein ist jede Kette  $\Gamma = \sum_{k=1}^m n_k\gamma_k$  von geschlossenen Wegen  $\gamma_k$  ein Zyklus. Insbesondere ist die Randkette eines positiv berandeten Gebietes ein Zyklus.
2. Sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  Wege mit Endpunkt  $\gamma_k =$  Anfangspunkt  $\gamma_{k+1}$ , mit  $k = 1, \dots, m-1$ , und Endpunkt  $\gamma_m = \gamma_1$ , so definiert die Kette  $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  einen Zyklus.

**Definition 1.6.9 (Integrale längs Ketten und Zyklen)** Ist  $\Gamma = \sum_{k=1}^m n_k\gamma_k$  eine Kette in  $U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, so setzen wir

$$\int_{\Gamma} f(z)dz := \sum_{k=1}^m n_k \int_{\gamma_k} f(z)dz. \quad (1.51)$$

Insbesondere können wir die Umlaufzahl auf Zyklen ausdehnen. Ist  $\Gamma = \sum_{k=1}^m n_k\gamma_k$  ein Zyklus, so setzen wir  $ind_{\Gamma}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\xi-z} d\xi, z \in \mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ .

□

Mit diesen Begriffen können wir nun auch eine verallgemeinerte Version des Cauchy-Integralsatzes und der Cauchy-Integralformel formulieren (ohne Beweis).

**Definition 1.6.10** Ein Zyklus in einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt nullhomolog in  $U$ , wenn für jeden Punkt  $z \in \mathbb{C} \setminus U$  (Komplement von  $U$ ) gilt:

$$ind_{\Gamma}(z) = 0.$$

Zwei Zyklen  $\Gamma_1, \Gamma_2$  heißen homolog, falls  $\Gamma_1 - \Gamma_2$  nullhomolog in  $U$  ist.

□

**Satz 1.6.11 (Cauchy'scher Integralsatz - Allgemeine Form)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  holomorph,  $\Gamma$  ein in  $U$  nullhomologer Zyklus. Dann gilt  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ .

□

**Satz 1.6.12 (Cauchy Integralformel - Allgemeine Form)** Unter den Voraussetzungen des Allgemeinen Cauchy-Integralsatzes gilt für jeden Punkt  $z \in U \setminus |\Gamma|$  und alle  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ :

$$\text{ind}_{\Gamma}(z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi. \quad (1.52)$$

□

## 1.6.2 Der Residuensatz

Mit den nun bereitgestellten Begriffen können wir den in der Funktionentheorie so bedeutenden Residuensatz formulieren.

**Satz 1.6.13 (Residuensatz)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $z_0, \dots, z_n$  endlich viele Punkte in  $U$  und  $\Gamma$  ein nullhomologer Zyklus in  $U$ , dessen Träger  $|\Gamma|$  keinen Punkt  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  enthält. Dann gilt für jede in  $U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$  holomorphe Funktion  $f$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \text{ind}_{\Gamma}(z_j) \text{Res}_{z_j} f. \quad (1.53)$$

**Beweis** Wir bezeichnen mit  $f_j$  den Hauptteil der Laurententwicklung von  $f$  um den Punkt  $z_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ). Wir wissen:  $f_j$  ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ . Sei  $f_j = \frac{a_j}{z - z_j} + \tilde{f}_j$  mit  $a_j = \text{Res}_{z_j} f$ . Dann ist  $f_j$  Laurentreihe in der der Koeffizient  $a_{-1}$  verschwindet, also hat  $\tilde{f}_j$  eine Stammfunktion auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ . Es folgt:

$$\int_{\Gamma} \tilde{f}_j dz = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} f_j dz = a_j \int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_j} dz = 2\pi i a_j \text{ind}_{\Gamma}(z_j).$$

Nach Konstruktion ist  $f - (f_1 + \dots + f_n)$  holomorph auf  $U$ . Da nach Voraussetzung  $\Gamma$  nullhomolog ist, gilt mit dem Cauchy-Integralsatz:

$$\int_{\Gamma} (f - (f_1 + \dots + f_n)) dz = 0.$$

Damit folgt also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} f_j(z)dz = \sum_{j=1}^n a_j \text{ind}_{\Gamma}(z_j) = \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f \text{ind}_{\Gamma}(z_j).$$

□

**Beispiel**  $f(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$ ,  $U = \mathbb{C}$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1$ . Sei  $\Gamma$  ein Kreis um 0 mit Radius  $> 1$ . Damit folgt aus dem Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z}{z^2-1} dz = \underbrace{\text{ind}_{\Gamma}(1)}_1 \underbrace{\text{Res}_1 f}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\text{ind}_{\Gamma}(-1)}_1 \underbrace{\text{Res}_{-1} f}_{\frac{1}{2}} = 1.$$

Also ist  $\int_{\Gamma} \frac{z}{z^2-1} dz = 2\pi i$ .

**Anwendung des Residuensatzes** Berechnung bestimmter Integrale ohne Kenntnis der Stammfunktion

**Typ I: Trigonometrische Funktionen** Wir betrachten (reelle) Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi, \tag{1.54}$$

wobei  $R$  eine rationale Funktion in zwei Variablen bezeichne, die auf der Einheitskreislinie  $C$  endlich ist.

**Rezept zur Berechnung von (1.54)** Wir setzen  $z = e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (Parametrisierung der Einheitskreislinie  $C$ ) und beachten, dass

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

und mit  $\frac{dz}{d\varphi} = e^{i\varphi} i = iz \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}$  liefert uns das:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{i} \int_C \overbrace{\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{=: \tilde{R}(z)} dz = 2\pi \sum \text{ind}_C(z_j) \text{Res}_{z_j} \tilde{R}.$$

Wobei die Indexfunktion 1 ist, wenn  $C \in \mathbb{E}$ , ansonsten 0. Wir erhalten also:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 2\pi \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} \tilde{R}$$

Wobei  $z_j$  die Pole von  $\tilde{R}$  in  $\mathbb{E}$  darstellen.

**Beispiel** Wir berechnen das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a \sin \varphi}, 0 < a < 1,$$

mit  $z = e^{i\varphi}$  ist  $1 - a \sin \varphi = 1 - \frac{a}{2i}(z - \frac{1}{z}) = \frac{-az^2 + 2iz + a}{2iz}$  und somit:

$$\tilde{R}(z) = \frac{-2iz}{az^2 - 2iz - a} \frac{1}{z} = \frac{-2i}{az^2 - 2iz - a}.$$

Die Nullstellen von  $az^2 - 2iz - a$  sind:

$$z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}i.$$

Somit sind  $z_1, z_2$  einfache Polstellen und  $|z_1| > 1, |z_2| < 1 \Rightarrow$  Es trägt also nur  $z_2$  zum Wert des Integrals bei!

$$\text{Res}_{z_2} \tilde{R} = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \tilde{R}(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \frac{-2i}{a(z - z_1)(z - z_2)} = -\frac{2i}{a(z_2 - z_1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Somit ist der Wert des Integrals  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a \sin \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$ !

□

**Typ II: Uneigentliche Integrale** Unter einem uneigentlichen Integral verstehen wir eines der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Auch derartige Integrale können - unter gewissen Bedingungen an die Integranden Funktion  $f$  mit dem Residuensatz berechnet werden. Wir bezeichnen mit  $\mathbb{H}$  die obere Halbebene der komplexen Zahlen, also  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$ .

**Satz 1.6.14** Sei  $U \supset \overline{\mathbb{H}}$  offen,  $z_j \in \mathbb{H}, j = 1, \dots, m$  und  $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion derart, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  existiert und  $\lim_{z \rightarrow \infty, z \in U} z f(z) = 0$  gilt. Dann folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f. \quad (1.55)$$



**Beweis** Sei  $\gamma_r : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{H}, \varphi \mapsto re^{i\varphi}$  der positiv orientierte Halbkreis mit Radius  $r$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $r$  so groß gewählt, dass alle Singularitäten  $z_j, j = 1, \dots, m \in B(0, r) \cap \mathbb{H}$  liegen. Residuensatz:

$$\int_{-r}^r f(x)dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f.$$

Mit der Abfallbedingung an den Integranden „im Unendlichen“ gilt:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma_r} |f(z)||dz| \leq \max_{z \in \gamma_r} |f(z)| \underbrace{\int_{\gamma_r} |dz|}_{\pi r} = \pi \max_{z \in \gamma_r} |zf(z)| \rightarrow 0,$$

bei  $r \rightarrow \infty$ .

□

**Typ III: Integrale der Form  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iax} dx$**

**Satz 1.6.15** Sei  $g$  holomorph auf  $\mathbb{C}$ , eventuell mit Ausnahme von endlich vielen Punkten, von denen keiner auf der reellen Achse liegt. Ferner sei  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ . Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iax} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}} \text{Res}_w [g(z)e^{iaz}], & a > 0 \\ -2\pi i \sum_{w \in \overline{\mathbb{C}\mathbb{H}}} \text{Res}_w [g(z)e^{iaz}], & a < 0 \end{cases} \quad (1.56)$$

Mit  $\overline{\mathbb{C}\mathbb{H}}$ , der unteren Halbebene.

**Beweis** Sei  $a > 0$ . Wir betrachten das Quadrat mit den Endpunkten  $s, s + iq, -r + iq, -r$  ( $r, s > 0, q = r + s$ ), wobei wir  $r, s > 0$  so groß wählen, dass alle Singularitäten von  $g$  in  $\mathbb{H}$  innerhalb des Quadrats liegen. Setze  $I_\nu := \int_{\gamma_\nu} g(z)e^{iaz} dz$ , wobei die  $\gamma_\nu, \nu = 1, 2, 3$  die Strecken  $\gamma_1 = [s, s + iq], \gamma_2 = [s + iq, -r + iq], \gamma_3 = [-r + iq, -r]$  bezeichnen. Angenommen wir können zeigen, dass  $I_\nu \rightarrow 0, r, s \rightarrow \infty$  gilt ( $\nu = 1, 2, 3$ ), dann folgt mit dem Residuensatz:

$$\int_{-r}^s g(x)e^{iax} dx + I_1 + I_2 + I_3 = 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}} \text{Res}_w [g(z)e^{iaz}],$$

und somit bei  $r, s \rightarrow \infty$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}} \text{Res}_w [g(z)e^{iaz}].$$

Bleibt also zu zeigen, dass  $I_\nu \rightarrow 0$ . Dazu schätzen wir ab:

- $|I_2| = \left| \int_{\gamma_2} g(\xi) e^{ia\xi} d\xi \right| \leq \max_{\xi \in \gamma_2} |g(\xi) e^{ia\xi}| (r+s) \leq \max_{\xi \in \gamma_2} |g(\xi)| e^{-aq} q \leq \max_{\xi \in \gamma_2} |g(\xi)|$ , falls  $e^{aq} > q$ , was für  $q > q_0(a)$  der Fall ist.

- $|I_1| = \left| \int_{\gamma_1} g(\xi) e^{ia\xi} d\xi \right| \leq \int_0^q |g(s+it)| \overbrace{|e^{ia(s+it)}|}^{e^{-at}} dt \leq \max_{\xi \in \gamma_1} |g(\xi)| \int_0^q e^{-at} dt = \max_{\xi \in \gamma_1} |g(\xi)| \frac{1}{a} (1 - e^{-aq}) \leq \max_{\xi \in \gamma_1} |g(\xi)| \frac{1}{a}$ .

Analog sieht man  $|I_3| \leq \max_{\xi \in \gamma_3} |g(\xi)| \frac{1}{a}$ . Wegen  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$  gilt  $I_\nu \rightarrow 0$  für  $r, s \rightarrow \infty$ . Analog argumentieren wir im Fall  $a < 0$  mit der unteren Halbebene.  $\square$

**Bemerkung** Der soeben bewiesene Satz erlaubt es uns nun auch Integrale der Form  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(ax) dx$  bzw.  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(ax) dx$  zu berechnen, denn mit den Identitäten  $\cos(ax) = \frac{1}{2}(e^{iax} + e^{-iax})$ ,  $\sin(ax) = \frac{1}{2i}(e^{iax} - e^{-iax})$  führt man diese Integrale auf der Form  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} dx$  zurück.  $\square$

# Kapitel 2

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten Differentialgleichungen der folgenden Form

$$u^{(m)} = f(x, u, u', \dots, u^{(m-1)}), \quad (2.1)$$

auf  $I \subset \mathbb{R}$ , wobei  $f : \mathbb{R} \times E^m \rightarrow E$ . Im Fall  $E = \mathbb{R}$  sprechen wir von einer (expliziten skalaren) gewöhnlichen Differentialgleichung. Im Fall  $E = \mathbb{R}^N$  sprechen wir von einem (expliziten) System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Ist  $f$  unabhängig von  $x$  so verwendet man den Zusatz autonom.

**Bemerkung** Wir bereits in Analysis II gezeigt wurde ist jedes System gewöhnlicher Differentialgleichungen  $m$ -ter Ordnung äquivalent zu einem System 1. Ordnung (Reduktion der Ordnung). Daher wird uns im folgenden hauptsächlich der Fall  $m = 1$  interessieren, also:

$$u' = f(x, u). \quad (2.2)$$

□

Die Hauptaufgaben der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen sind die folgenden:

- Nachweis der Existenz von Lösungen, Überblick über Gesamtheit aller Lösungen („allgemeine Lösung“).
- Eindeutigkeit von Lösungen; im Allgemeinen werden viele Lösungen existieren, von denen aber nur solche gefragt sind, die gewissen Zusatzbedingungen (Anfangsbedingungen, Randbedingungen) genügen.
- Abhängigkeit der Lösungen von Daten.

- Qualitative Aussagen über Lösungen (etwa Analyse des Langzeitverhaltens bei  $x \rightarrow \infty$ , Asymptotik).
- Numerische Berechnung (Entwicklung von Verfahren zur Berechnung von Lösungen mit Fehleranalyse).

**Bemerkung** Aus Analysis II kennen wir bereits den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, der unter der Voraussetzung, dass die rechte Seite der Differentialgleichung  $u' = f(x, u)$  stetig und bezüglich der zeitlichen Variable einer Lipschitz-Bedingung genügt, die lokale Existenz einer eindeutigen Lösung zum Anfangswertproblem  $u(x_0) = u_0$  garantiert.

**Definition 2.0.16** 1. Ein Anfangswertproblem besteht aus einer Differentialgleichung  $u^{(m)} = f(x, u, \dots, u^{(m-1)})$  und einem Satz von Anfangsdaten  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\eta_0, \dots, \eta_{m-1} \in \mathbb{R}^N$ .  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt Lösung des Anfangswertproblems, wenn  $u$  die Differentialgleichung auf  $I$  löst,  $x_0 \in I$  und die Anfangsbedingungen  $u(x_0) = \eta_0, u'(x_0) = \eta_1, \dots, u^{(m-1)}(x_0) = \eta_{m-1}$  gelten.

2. Ein Randwertproblem besteht aus einer Differentialgleichung, einem Intervall  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  und gegebenen Funktionen  $g, h$  auf Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .  $u$  heißt Lösung des Randwertproblems, wenn  $u$  die Differentialgleichung auf  $[\alpha, \beta]$  löst und die Randbedingungen  $g(u(\alpha), u'(\alpha), \dots, u^{(n)}(\alpha)) = 0, h(u(\beta), \dots, u^{(n)}(\beta)) = 0$  erfüllt sind. In sinnvollen Randwertproblemen ist die Ordnung der Differentialgleichungen gerade und  $n = \frac{m}{2} - 1$ .

□

## Beispiele

1. Ein Anfangswertproblem im Fall  $m = 2$  ist zum Beispiel die Differentialgleichung auf  $I = \mathbb{R}$ :

$$u'' + \omega^2 u = 0,$$

mit Anfangsbedingungen  $u(0) = \eta_0, u'(0) = \eta_1$  (Physikalisches Pendel). Dieses hat die eindeutige Lösung  $u(x) = \eta_0 \cos(\omega x) + \frac{\eta_1}{\omega} \sin(\omega x), x \in \mathbb{R}$ .

2. Ein Randwertproblem im Fall  $m = 2, n = 0$  könnte man zum Beispiel wie folgt stellen:

$$u'' + \omega^2 u = 0, I = [0, \pi],$$

mit den Randbedingungen  $u(0) = \eta_0, u(\pi) = \eta_1$ . Die Lösung dieses Randwertproblems ist:

$$u(x) = \eta_0 \cos(\omega x) + \eta_1 \sin(\omega x), x \in [0, \pi].$$

## 2.1 Elementare Lösungsmethoden

Wir wollen einige elementare Lösungsmethoden für bestimmte Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen erarbeiten. Aus der Analysis II ist bereits die Methode der Trennung der Variablen für Differentialgleichungen vom Typ  $y' = f(x)g(y)$  bekannt. Gibt man die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  vor, so hat man mit  $H(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(v)} dv$  und  $F(x) := \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$  durch  $H(y(x)) = F(x)$  bzw.  $y(x) = H^{-1}(F(x))$  die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x)g(y), y(x_0) = y_0$  gegeben. Die Methode der Trennung der Variablen lässt sich auch bei Differentialgleichungen einer komplexwertigen Funktion anwenden. Aus

$$y' = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{g(y(x))}_{\in \mathbb{C}} \quad (2.3)$$

mit holomorphen  $g$ , folgt mit  $g(y(x)) \neq 0$ :

$$\frac{y'}{g(y(x))} = f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(z)} dz}_{=H(y(x))} = \int_{x_0}^x f(s) ds - C =: F(x) - C$$

Wenn  $H$  komplexe Stammfunktion zu  $\frac{1}{g}$  ist,  $F$  Stammfunktion zu  $f, c \in \mathbb{C}$  so folgt wieder:

$$y(x) = H^{-1}(F(x) - C)$$

Wenn  $H^{-1}$  die Umkehrfunktion zu  $H$  ist. Auch bei gewissen Differentialgleichungen höherer Ordnung funktioniert die Methode der Trennung der Variablen. Etwa  $y'' = f(x)g(y') \rightarrow y'$ . Dies können wir nun integrieren um zu  $y$  zu gelangen, abhängig von den beiden Integrationskonstanten. Oder auch bei

$$y'' = g(y) \Leftrightarrow y' y'' = y' g(y) \Leftrightarrow [(y')^2]' = 2[G(y)]' \quad (2.4)$$

mit  $G(y) = \int^y g(s) ds \Leftrightarrow y'^2 = 2G(y) + C \Leftrightarrow y' = \pm \sqrt{2G(y) + C}$ . Nun kann man  $y$  mit Trennung der Variable lösen. Allgemeiner kann man auch Gleichungen der Form

$$y'' = h(y')g(y) \quad (2.5)$$

behandeln. Unter den Voraussetzungen, dass  $y \neq 0, h(y') \neq 0$  gilt, folgt:

$$(h(y'))^{-1}y'y'' = y'g(y) \Leftrightarrow H(y') = G(y) + C$$

mit  $H(p) = \int^p \frac{q}{h(q)}dq, G(y) = \int^y g(s)ds \Leftrightarrow y' = H^{-1}(G(y) + C) \Rightarrow y.$

□

### Beispiele

1.  $y' = f(x)y \in \mathbb{C}$  somit folgt mit der Bedingung, dass  $y \neq 0$  ist:

$$\frac{y'}{y} = f(x) \Leftrightarrow (\log y)' = F(x) + C, F(x) = \int^x f(\xi)d\xi \Leftrightarrow y = Ce^{F(x)}, C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Aus  $\frac{d}{dx}(e^{-F(x)}y(x)) = e^{-F(x)}(-f(x)y(x) + y'(x))$  sieht man, dass  $y(x) = Ce^{F(x)}$  die Allgemeine Lösung ist ( $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ).

2.  $y'' = a\sqrt{1 + y'^2}$  beschreibt die Differentialgleichung einer hängenden Kette, dabei ist  $a > 0$ :

$$\frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = a \Leftrightarrow \operatorname{arsinh}(y') = ax + b$$

Nun können wir die Umkehrfunktion auf die Gleichung loslassen:

$$\Leftrightarrow y'(x) = \sinh(ax + b) \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{a} \cosh(ax + b) + C$$

Der Graph von  $y(x)$  wird Kettenlinie genannt. Das Randwertproblem für eine Kette mit fester Länge  $> |Q - P|$  von  $P$  nach  $Q$  ist eindeutig lösbar.

**Satz 2.1.1 (lineare Differentialgleichungen erster Ordnung)** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}, I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{2.6}$$

kann durch Integration bestimmt werden. Genauer gilt, dass die allgemeine Lösung durch  $y(x) = e^{A(x)}(B(x) + C)$  gegeben ist, wobei  $A(x)$  eine Stammfunktion zu  $a$  auf  $I$  ist,  $B$  eine Stammfunktion zu  $e^{-A(x)}b(x)$  auf  $I$  ist und  $C \in \mathbb{K}$ . Jedes Anfangswertproblem  $y' = ay + b, y(x_0) = y_0$  mit  $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{K}$  ist eindeutig lösbar und zwar durch:

$$y(x) = e^{A(x)}(e^{-A(x_0)}y_0 + B(x) - B(x_0)) = e^{A(x)}[e^{-A(x_0)}y_0 + \int_{x_0}^x e^{-A(s)}b(s)ds] \tag{2.7}$$

□

**Beispiele**

1.  $y' = -\tan(x)y + \sin(x)$  für  $|x| < \frac{\pi}{2}$ . Hier ist  $a(x) = -\tan(x)$ ,  $A(x) = \log(\cos(x))$ . Damit folgt, dass  $Ce^{A(x)} = C \cos(x)$  und somit die folgt auch die Lösung der homogenen Gleichung. Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y(x) = \cos(x)\left(C + \int \frac{1}{\cos(s)} \sin(s) ds\right) = \cos(x)(C - \log(\cos(x)))$$

2. Eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung  $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$  lässt sich mit dem Ansatz  $y(x) = v(x)y_0(x)$  auf eine homogene Differentialgleichung 1. Ordnung reduzieren. Dabei ist  $y_0 \neq 0$  eine „bekannte Lösung“ der Differentialgleichung. Man rechnet nach, dass

$$\begin{aligned} (vy_0)'' + a_1(vy_0)' + a_0vy_0 &= v''y_0 + 2v'y_0' + vy_0'' + a_1(v'y_0 + vy_0') + a_0vy_0 = \\ &= v''y_0 + v'(2y_0' + a_1y_0) + v \underbrace{(y_0'' + a_1y_0' + a_0y_0)}_{=0} \end{aligned}$$

Somit ist  $y = vy_0$  genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn gilt

$$v''y_0 + v'(2y_0' + a_1y_0) = 0 \underset{y_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} v'' = -\left(2\frac{y_0'}{y_0} + a_1\right)v' \quad (2.8)$$

Letzteres ist eine homogene lineare Differentialgleichung für  $v'$ . Das Verfahren wird d'Alembertsches Reduktionsverfahren genannt.

□

Wir wollen nun sogenannte quasilineare Differentialgleichungen betrachten.

**Definition 2.1.2** Eine quasilineare Differentialgleichung 1. Ordnung (das heißt eine Differentialgleichung, die in der höchsten auftretenden Ableitung linear ist)

$$g(x, y) + h(x, y)y' = 0 \quad (2.9)$$

heißt auf  $D \subset \mathbb{R}^2$  exakt, wenn es eine differenzierbare Funktion  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = g$  und  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = h$  gibt ( $\phi$  heißt Stammfunktion).

□

**Satz 2.1.3 (Exakte Differentialgleichungen)** Die Lösungen einer exakten Differentialgleichung  $g(x, y) + h(x, y)y' = 0$  auf  $D \subset \mathbb{R}^2$  sind genau die differenzierbaren Funktionen  $y : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$  mit dem Graphen von  $y \subset D$ , die einer impliziten Gleichung  $\phi(x, y(x)) = C$  genügen, dabei ist  $\phi$  Stammfunktion zu  $gdx + hdy = 0$  auf  $D$  und  $C \in \mathbb{R}$ .

**Beweis** Es gilt:

$$\frac{d}{dx}\phi(x, y(x)) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = g(x, y(x)) + h(x, y(x))y'(x)$$

□

### Bemerkungen

1. Sind  $g, h$  differenzierbar, so ist  $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$  auf  $D$  notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion  $\phi$ . Ist  $D$  sternförmig (oder einfach zusammenhängend) so ist dies auch hinreichend.
2. Ist die Differentialgleichung nicht exakt, so kann man versuchen, sie durch Multiplikation mit einem Faktor  $f(x, y)$  in eine exakte Differentialgleichung zu überführen.

$$g(x, y) + h(x, y)y' = 0 \stackrel{f \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x, y)g(x, y) + f(x, y)h(x, y)y' = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung aus (1) lautet dann:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial y} = \frac{\partial(fh)}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial g}{\partial y}f = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial h}{\partial x}f \quad (2.10)$$

Ist (2.10) erfüllt, dann nennt man  $f$  integrierenden Faktor. Offenbar ist (2.10) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für  $f$ .

### Beispiele

1.  $g(x) + h(y)y' = 0$ . Dann ist  $\phi(x, y) = G(x) + H(y)$  mit Funktionen  $G, H$  für die  $G' = g, H' = h$  gilt. Somit folgt  $G(x) + H(y(x)) = C$  für Lösungen  $y$  und daher  $y(x) = H^{-1}(C - G(x))$ . Dies entspricht der Trennung der Variablen.



2. Die Differentialgleichung  $a(x)y + b(x) - y'(x) = 0$  ist nicht exakt, denn  $g(x, y) = a(x)y + b(x), h(x, y) = 1$ . Die Integrabilitätsbedingung liefert:  $\frac{\partial g}{\partial y} = a \neq \frac{\partial h}{\partial x} = 0, a \neq 0$ . Es gibt aber einen integrierenden Faktor  $\varphi(x)$ , denn

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi(x)(a(x)y + b(x))) = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)$$

Somit folgt:

$$\Leftrightarrow \varphi(x)a(x) = -\varphi'(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = e^{-A(x)}C$$

mit  $A'(x) = a(x)$ . Dann gilt für die Differentialgleichung:

$$e^{-A(x)}a(x)y + e^{-A(x)}b(x) - e^{-A(x)}y' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-A(x)}y - \int e^{-A(s)}b(s)ds)$$

Und dies ergibt:

$$\Leftrightarrow e^{-A(x)}y(x) - \int e^{-A(s)}b(s)ds = C \Leftrightarrow y(x) = e^{A(x)}(C + \int e^{A(s)}b(s)ds) = 0$$

□

**Definition 2.1.4** Eine Funktion  $\phi \neq 0$  auf einem Gebiet des erweiterten Phasenraumes einer Differentialgleichung  $y^{(m)} = f(x, y, \dots, y^{(m-1)})$  auf  $\mathbb{R}^N$  heißt erstes Integral der Differentialgleichung, wenn  $\phi(x, y(x), \dots, y^{(m-1)}(x))$  bzw.  $\phi(y(x), \dots, y^{(m-1)}(x))$  konstant für jede Lösung  $y(x)$  ist. Man nennt dies  $\phi$  dann auch Erhaltungsgröße.

□

Anschaulich bedeutet ein erstes Integral, dass die durch die Lösungen definierten Bahnkurven  $x \mapsto (x, y(x), \dots, y^{(m-1)}(x)), x \mapsto (y(x), \dots, y^{(m-1)}(x))$  im (erweiterten) Phasenraum ganz in den Niveaumengen von  $\phi$  verlaufen. Im Fall  $N = 1, m = 1$  legt dann  $\phi(x, y(x)) = C$  (Vergleiche Exakte Differentialgleichungen) die Lösung völlig fest, wenn man nach  $y(x)$  auflösen kann. Im Fall  $N = 2, m = 1$  legt  $\phi(y_1(x), y_2(x)) = C$  noch die Geometrie der Bahnkurven fest, allerdings wird nichts über die Parametrisierung ausgesagt. Die Bahnkurven parametrisieren also die Niveaulinien von  $\phi$ , sofern  $\nabla\phi \neq 0$  ist.

Offenbar hat die Dimension des Phasenraums Einfluss auf den Informationsgehalt eines ersten Integrals und zwar in dem Sinn, dass man umso weniger Informationen hat, je größer der Phasenraum ist. Im Allgemeinen hat eine Differentialgleichung überhaupt kein 1. Integral und wenn welche existieren, so können sie durch kleine Störungen zerstört werden. Wenn man aber ein erstes Integral kennt, so kann man es benutzen um die Anzahl der Unbekannten in einer Differentialgleichung zu reduzieren.

**Beispiele**

1.  $y_1' = y_1, y_2' = -y_2$ , also  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  hat als erstes Integral  $\phi(y_1, y_2) = y_1 y_2$ , denn  $\frac{d}{dx}(y_1 y_2) = y_1' y_2 + y_1 y_2' = y_1 y_2 - y_1 y_2 = 0$ . Lösungen sind  $y_1(x) = C_1 e^x, y_2(x) = C_2 e^{-x}$ . Analog hat  $y_1' = -y_2, y_2' = y_1$  also  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  als 1. Integral  $\phi(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ , denn  $\frac{d}{dx}(y_1^2 + y_2^2) = 2y_1 y_1' + 2y_2 y_2' = -2y_1 y_2 + 2y_1 y_2 = 0$ . Die Lösungskurven parametrisieren Kreislinien, die Parametrisierung ist proportional zur Bogenlänge, da  $y_1'^2 + y_2'^2 = y_2^2 + y_1^2 = C$  ist.
2. Die Bewegungsgleichungen der Mechanik für einen punktförmigen Körper der Masse  $m$  in einem Kraftfeld  $F(t, u)$  lauten

$$mu''(t) = F(t, u(t)), u(t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

Ist  $F$  unabhängig von  $t$  und konservativ, das heißt  $F(u) = -\nabla V(u)$ , so ist die Gesamtenergie  $E(u, p) = \frac{m}{2} p^2 + V(u)$  ein erstes Integral, denn es gilt:

$$\frac{d}{dt} E(u(t), u'(t)) = mu' u'' + u' \nabla V(u) = -u' \nabla V(u) + u' \nabla V(u) = 0$$

Damit gilt für Lösungen

$$\frac{m}{2} |u'(t)|^2 + V(u(t)) = E = C$$

Dies entspricht dem Energieerhaltungssatz. Bei einem Zentralkraftfeld, d.h.  $V(u) = V(|u|)$  ist auch der Drehimpuls

$$\vec{l}(u, p) = mu \times p = m(u_2 p_3 - u_3 p_2, u_3 p_1 - u_1 p_3, u_1 p_2 - u_2 p_1)$$

auf den Lösungskurven konstant (die Komponenten von  $\vec{l}$  sind drei weitere erste Integrale). Bemerke dazu:

$$\frac{d}{dt} (mu \times u') = \underbrace{mu' \times u'}_{=0} + mu \times u'' = mu \times (-\nabla V(|u|)) = -mu \times V'(|u|) \frac{u}{|u|} = 0$$

Dies ist der Drehimpulserhaltungssatz  $mu \times u' = C = \vec{l} = (0, 0, l)$  (bei geeigneter Wahl der Basis im  $\mathbb{R}^3$ ).

$$mu''(t) = F(t, x)$$

$F$  zeitunabhängig konservativ mit  $F = -\nabla V(x)$ .

$$E = \frac{m}{2}|u'(t)|^2 + V(u(t)) = \text{const}$$

Zentralkraftfeld  $V(x) = V(|x|)$

$$\vec{l} = mu \times u' = \text{const} = (0, 0, l)$$

- Fall  $l = 0$ : Entspricht einer Bewegung auf einem Strahl aus dem Zentrum der Kraft.
- Fall  $l > 0$ : Hier gilt  $\vec{u}\vec{l} = mu(mu \times u') = 0 = u_3(t)$ . Die gesamte Bewegung verläuft in der  $(u_1, u_2)$ -Ebene. In dieser Ebene führen wir Polarkoordinaten  $(r, \vartheta)$  ein, das heißt

$$r(t) = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}, \vartheta(t) = \arg(u_1(t), u_2(t)).$$

Also:

$$|u'|^2 = r'^2 + r^2 \vartheta'^2, \vartheta' = \frac{u_1 u_2' - u_2 u_1'}{r^2}$$

Die ersten Integrale führen dann zur Energieerhaltung

$$E = \frac{m}{2}|u'|^2 + V(|u|) = \frac{m}{2}r'^2 + \frac{m}{2}r^2 \vartheta'^2 + V(r) \quad (2.12)$$

und zur Drehimpulserhaltung

$$l = m(u_1 u_2' - u_2 u_1') = mr^2 \vartheta'. \quad (2.13)$$

Setzt man (2.13) in (2.12) ein, also  $\vartheta' = \frac{l}{mr^2}$ , so erhält man:

$$E = \frac{m}{2}r'^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

Damit ist es gelungen die drei Bewegungsgleichungen 2. Ordnung auf die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung durch Trennung der Variablen

$$r' = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2})}$$

und mittels einer weiteren Integration von  $\vartheta' = \frac{1}{mr^2}$  zurückzuführen. Aus (2.13) und (2.12) erhält man die Differentialgleichung der Bahnkurven (ohne zusätzliche Parametrisierung). Dazu fasst man  $r$  als Funktion von  $\vartheta$  auf. Dies geht wie folgt: Da  $\vartheta' > 0$  nach (2.13) kann man  $t$  als Funktion von  $\vartheta$  auffassen, genauer hat man  $t = \vartheta^{-1}(\eta)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} r(t) &= r(\vartheta^{-1}(\eta)) = (r \circ \vartheta^{-1})(\eta) \wedge \frac{d}{d\eta}(r \circ \vartheta^{-1})(\eta) = \frac{dr}{dt}(\vartheta^{-1}(\eta)) \frac{1}{\frac{d\vartheta}{dt}(\vartheta^{-1}(\eta))} = \\ &= \pm \frac{m(r \circ \vartheta^{-1})^2(\eta)}{l} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r \circ \vartheta^{-1}(\eta)) - \frac{l^2}{2m(r \circ \vartheta^{-1})^2(\eta)})} \end{aligned}$$

bzw. mit  $R(\eta) = (r \circ \vartheta^{-1})(\eta)$

$$\frac{dR}{d\eta} = \pm \frac{mR^2}{l} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(R) - \frac{l^2}{2mR^2})}$$

und mit Trennung der Variablen

$$\pm \int^{R(\eta)} \frac{ldR}{mR^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(R) - \frac{l^2}{2mR^2})}} = \eta - \eta_0.$$

Substituiert man  $R = \frac{1}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{R}$ , so findet man

$$\mp \int^{\frac{1}{R(\eta)}} \frac{l d\sigma}{\sqrt{2mE - 2mV(\frac{1}{\sigma}) - l^2\sigma^2}} = \eta - \eta_0.$$

Im Falle eines Coulomb-Feldes  $V(\varrho) = -\frac{k}{\varrho}$  ist  $V(\frac{1}{\sigma}) = -k\sigma$  und es folgt:

$$\mp \int^{\frac{1}{R(\eta)}} \frac{l d\sigma}{\sqrt{2mE + 2mk\sigma - l^2\sigma^2}} = \eta - \eta_0 \Leftrightarrow \pm \arccos\left(\frac{\frac{l^2}{mk} \frac{1}{R(\eta)} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}\right)$$

Nun kann man das ganze noch auflösen:

$$\frac{1}{R(\eta)} = \frac{mk}{l^2}(1 + \varepsilon \cos(\eta - \eta_0)), \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

Aus der Geometrie wissen wir, dass das gerade die Polardarstellung eines Kegelschnittes der Exzentrizität  $\varepsilon$  mit dem Nullpunkt als Brennpunkt ist ( $\varepsilon = 0$ , Kreis;  $0 < \varepsilon < 1$ , Ellipse;  $\varepsilon = 1$ , Parabel;  $\varepsilon > 1$ , Hyperbel).

Fazit: Die Bahnkurven eines Massepunktes in einem Coulomb-Feld sind Kegelschnitte mit dem Zentrum der Kraft im Brennpunkt. Somit folgt das 1. Kepler-Gesetz direkt. Die zeitliche Parametrisierung wird über das 2. Keplersche Gesetz festgelegt. Dies ist nichts anderes als die geometrische Interpretation des Drehimpuls-Erhaltungssatzes:

$$mr^2\vartheta' = l \Leftrightarrow \frac{1}{2}r^2\vartheta' = \frac{l}{2m}$$

Beobachtet man nun

$$\frac{1}{2} \int^t (u_1 u_2' - u_2 u_1') dt = \frac{1}{2} \int^t r^2 \vartheta' dt$$

die von der Kurve  $u(t)$  überstrichene Fläche (orientiert) ist, so beschreibt  $\frac{1}{2}r^2\vartheta' = \frac{l}{2m}$  gerade die Erhaltung der Flächengeschwindigkeit, das heißt die Strecke  $[0, u(t)]$  überstreicht in gleichen Zeiträumen gleichgroße Flächen. Im Fall einer elliptisch geschlossenen Bahnkurve, das heißt wenn  $0 \leq \varepsilon < 1$ , ist die große Halbachse

$$a = \frac{1}{2}(R_{\max} + R_{\min}) = \frac{1}{2} \frac{l^2}{mk} \left( \frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{1+\varepsilon} \right) = -\frac{k}{2E}$$

und die kleine Halbachse  $b = a \sqrt{1-\varepsilon^2} = -l \sqrt{\frac{|a|}{mk}}$ . In der Umlaufzeit  $T$  wird der gesamte Ellipseninhalte  $\pi ab$  überstrichen. Also:

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{dA}{dt}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}r^2\vartheta'} = \frac{2\pi abm}{l} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} |a|^{\frac{3}{2}}$$

das ist das 3. Keplersche Gesetz. Die Quadrate der Umlaufzeiten sind proportional zur dritten Potenz der großen Halbachsen.

□

Eine weitere wichtige Methode zur expliziten Lösung von Differentialgleichungen ist die Methode der Variablentransformation. Durch die Einführung neuer unabhängigen Variablen  $\tilde{x}$  oder abhängiger Variablen  $\tilde{y}$  gelingt es manchmal eine gegebene Differentialgleichung in eine andere explizit lösbare Differentialgleichung zu überführen.

### Beispiele

- Die Eulersche Differentialgleichung:

$$I \subset \mathbb{R}, x^m y^{(m)} + a_{m-1} x^{m-1} y^{(m-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad (2.14)$$

Behandelt man mit der Substitution  $y(x) = \tilde{y}(\log x)$  also wegen  $\tilde{y}'(\log x) = xy'(x)$ ,  $\tilde{y}''(\log x) = x(y'(x) + xy''(x))$  führt dies auf einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für  $\tilde{y}$  auf  $\log I = J$ :

$$\tilde{y}^{(m)} + b_{m-1}\tilde{y}^{(m-1)} + \dots + b_0\tilde{y} = 0$$

- Die Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + g(x)y + h(x)y^r = 0, r \neq 1 \quad (2.15)$$

Setzt man  $\tilde{y}(x) = y(x)^{1-r}$  mit

$$\tilde{y}(x) = (1-r)y(x)^{1-r}y'(x) = (1-r)\tilde{y}(x)^{-\frac{r}{1-r}}y'(x)$$

so erhält man (sofern  $y > 0$ ):

$$\frac{1}{1-r}\tilde{y}(x)^{\frac{r}{1-r}}\tilde{y}'(x) + g(x)\tilde{y}(x)^{\frac{1}{1-r}} + h(x)\tilde{y}(x)^{\frac{r}{1-r}} = 0$$

Diese Differentialgleichung ist linear und von 1. Ordnung:

$$\frac{1}{1-r}\tilde{y}'(x) + g(x) + h(x) = 0$$

Die Rücktransformation ist durch  $y(x) = \tilde{y}(x)^{\frac{1}{1-r}}$  gegeben.

□

## 2.2 Lineare Differentialgleichungen und Systeme

Lineare Systeme wurden bereits in der Vorlesung Analysis II behandelt. Da sie v.a. in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen eine wichtige Rolle spielen (zum Beispiel bei Stabilitätsaussagen) wollen wir die wesentlichen Sätze über lineare Sätze noch einmal wiederholen (allerdings größtenteils ohne Beweis).

**Definition 2.2.1 (Lineare Differentialgleichungen)** Eine lineare Differentialgleichungen  $m$ -ter Ordnung auf einem normierten Raum  $E$  über  $\mathbb{K}$ , mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , ist eine Differentialgleichung der Form

$$A_m(x)y^{(m)}(x) + A_{m-1}(x)y^{(m-1)}(x) + \dots + A_0(x)y(x) = b(x) \quad (2.16)$$

auf einem Intervall  $I$  mit stetigen Koeffizienten  $A_j \in C^0(I, L(E, E))$  (im Fall  $E = \mathbb{K}^N$  sind das  $N \times N$ -matrixwertigen Funktionen) und einer stetigen Inhomogenität  $b \in C^0(I, E)$ . Ist  $b \equiv 0$ , so heißt die Differentialgleichung homogen. Im Fall  $E = \mathbb{K}^N$  spricht man

von einem linearen Differentialgleichungssystem.

Das Polynom  $p(x, \xi) = A_m(x)\xi^m + \dots + A_1(x)\xi + A_0(x)$  mit Koeffizienten in  $C^0(I, L(E, E))$  heißt charakteristisches Polynom der Differentialgleichung oder auch Symbol des Differentialoperators

$$p(x, \frac{d}{dx}) = A_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + \dots + A_1(x) \frac{d}{dx} + A_0(x) \quad (2.17)$$

□

### Lemma 2.2.2 (Überlagerungsprinzip)

1. Im homogenen Fall  $b = 0$  sind Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen, das heißt der Lösungsraum ist ein Linearer Raum.
2. Im inhomogenen Fall  $b \neq 0$  ist die Allgemeine Lösung die Summe einer beliebigen speziellen Lösung  $y_{sp}$  der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung  $y_k$  der homogenen Gleichung.
3. Sind  $y_1, \dots, y_k$  Lösungen von  $p(x, \frac{d}{dx})y_i = b_i$  und  $c_i \in \mathbb{K}$ , so löst  $y = \sum_{i=1}^l c_i y_i$  die Differentialgleichung  $p(x, \frac{d}{dx})y = \sum_{i=1}^l c_i b_i$ .
4. Ist  $E = E_{\mathbb{R}} + i\mathbb{R}$  Komplexifizierung eines reellen Raumes (etwa  $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^N$  und  $E = \mathbb{C}^N$ ) und sind alle Koeffizienten  $A_j(x)$  und die rechte Seite  $b(x)$  reell, so sind die reellen Lösungen von (2.16) genau die Realteile der komplexen Lösungen.

□

**Definition 2.2.3** Eine Basis (über  $\mathbb{K}$ ) des Lösungsraumes der explizit homogenen Differentialgleichung

$$y^{(m)} + A_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + A_0(x)y = 0 \quad (2.18)$$

auf  $I$  heißt Fundamentalsystem der Differentialgleichung auf  $I$ .

□

Eine besonders einfache Situation liegt vor, wenn man eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten betrachtet.

### Satz 2.2.4 (Skalare lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

- (1) Der Raum der komplexwertigen Lösungen der Differentialgleichung  $p(\frac{d}{dx})y = y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_0y = 0$  auf  $I$  mit  $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$  hat die Funktionen  $x^j e^{\lambda x}$ ,  $0 \leq j \leq m_\lambda$ , wobei  $\lambda$  Nullstelle von  $p(\xi) = \xi^m + a_{m-1}\xi^{m-1} + \dots + a_0$  mit Vielfachheit  $m_\lambda$  ist, als Basis. Die Allgemeine Lösung ist eine Linearkombination dieser  $m$ -Funktionen.
- (1<sub>R</sub>) Sind die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{m-1}$  reelle Zahlen, so hat der Raum der reellen Lösungen von  $p(\frac{d}{dx})y = 0$  auf  $I$  die Basis  $x^j e^{\lambda x}$  für  $\lambda$  reelle Nullstelle von  $p$  und  $x^j e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  bzw.  $x^j e^{\alpha x} \sin(\beta x)$  für  $\lambda$  komplexe Nullstelle von  $p$  mit  $0 \leq j \leq m_\lambda$ , der Vielfachheit von  $\lambda$ .
- (2) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung  $p(\frac{d}{dx})y = b$  mit  $b \in C^0(I, \mathbb{C})$  ist  $y_{sp}(x) = I_{\lambda_1} \dots I_{\lambda_m} b(x)$  mit  $[I_\lambda v](x) = e^{\lambda x} \int_{x_0}^x e^{-\lambda s} v(s) ds$ ,  $x_0 \in I$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  die Nullstellen von  $p$  (mit Vielfachheit aufgeführt).
- (3) Jedes Anfangswertproblem  $p(\frac{d}{dx})y = b$  auf  $I$ ,  $y^{(j)}(x_0) = \eta_j$  für  $j = 0, \dots, m-1$  mit  $b \in C^0(I, \mathbb{K})$ ,  $a_j \in \mathbb{K}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $\eta_j \in \mathbb{K}$  besitzt eine eindeutige  $\mathbb{K}$ -wertige Lösung der Form  $y_{sp} + \sum_{j=1}^m c_j y_j$  wobei  $y_1, \dots, y_m$  die Basisfunktionen aus (1) bzw. (1) sind,  $y_{sp}$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist und die  $c_j \in \mathbb{K}$  die eindeutigen Lösungen des linearen Gleichungssystems  $\sum_{j=1}^m c_j y_j^{(l)}(x_0) = \eta_l - y_{sp}^{(l)}(x_0)$ ,  $0 \leq l \leq m-1$  sind.

□

**Bemerkung** Bei speziellen Inhomogenitäten wie zum Beispiel  $b(x) = x^k e^{\mu x}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ , kann man die Integrationen  $I_{\lambda_1}, \dots, I_{\lambda_m} b$  bei der Berechnung der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung vermeiden. Denn zu derartigen  $b$  gibt es eine spezielle Lösung der Gestalt

$$y_{sp} = (d_k x^k + \dots + d_1 x + d_0) x^l e^{\mu x}. \quad (2.19)$$

Dabei ist  $l$  die Ordnung der Nullstelle  $\mu$  von  $p(\mu) = 0$  und  $l = 0$ , falls  $p(\mu) \neq 0$ . Dies sieht man wie folgt ein:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^{k+1} (x^k e^{\mu x}) &= \left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^k (kx^{k-1} e^{\mu x} + \mu x^k e^{\mu x} - \mu x^k e^{\mu x}) = \\ &= \left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^k (kx^{k-1} e^{\mu x}) = 0 \end{aligned}$$

Folgt für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^{k+1} p\left(\frac{d}{dx}\right) y_{sp} = \left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^{k+1} b(x) = \left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^{k+1} (x^k e^{\mu x}) = 0$$



Das heißt  $y_{sp} = (d_k x^k + \dots + d_0)x^l e^{\mu x}$ . Die Koeffizienten  $d_0, \dots, d_k$  bestimmt man wie folgt:

Einsetzen des Ansatzes für die spezielle Lösung  $y_{sp}(x) = (d_k x^k + \dots + d_0)x^l e^{\mu x}$  in die Differentialgleichung  $p(\frac{d}{dx}) = x^k e^{\mu x}$  und anschließend Kürzen von  $e^{\mu x}$  ergeben auf der linken Seite ein Polynom vom Grad  $k$  (höhere Potenzen von  $x$  können nicht auftreten). Der Koeffizienten Vergleich der Potenzen  $x^0, \dots, x^k$  liefert dann die Koeffizienten  $d_0, \dots, d_k$  (da zugehöriges Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, da  $(d_k x^k + \dots + d_1 x + d_0)x^l e^{\mu x}$  die homogene Gleichung nur löst, wenn  $d_0 = \dots = d_k = 0$  ist, da  $l = \text{Ord}_p(\lambda)$  ist).

**Satz 2.2.5 (Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten)** Die eindeutige Lösung  $y : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}^N \vee \mathbb{C}^N$  des Anfangswertproblems  $y' = Ay, y(x_0) = \eta$  mit  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  ist die analytische Funktion  $y(x) = e^{(x-x_0)A} \eta$ . Darüber hinaus ist jedes Anfangswertproblem  $y' = Ay + b$  mit  $y(x_0) = \eta, b \in C^0(I, \mathbb{K}^N)$  eindeutig lösbar und zwar durch

$$y(x) = e^{xA} (e^{-x_0 A} \eta + \int_{x_0}^x e^{-sA} b(s) ds). \quad (2.20)$$

□

### Bemerkungen

1.  $e^{xA}$  ist wohldefiniert über die Exponentialreihe  $e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (xA)^k$ .
2. Für diagonalisierbare Matrizen  $A = TBT^{-1}$  mit  $T \in \text{GL}(\mathbb{C}^N)$  und  $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  ist

$$e^{xA} = T \text{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_N x}) T^{-1}.$$

In diesem Fall bilden die Funktionen  $y_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k$  ( $v_k$  Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_k$ ) ein Fundamentalsystem zu  $y' = Ay$ .

3. Im Allgemeinen Fall einer nicht diagonalisierbaren Matrix  $A$  muss man eine Zerlegung der Form  $A = T + S$  mit  $S$  Diagonalmatrix und  $T$  nilpotent (mit  $TS = ST$ ) vornehmen. So das gilt:  $\exp(A) = \exp(T + S) = \exp(T) \exp(S)$ . Die Lineare Algebra zeigt uns, dass dies über  $\mathbb{C}$  stets möglich und eindeutig ist (Jordansche Normalform). Hier benötigt man den Satz über die Hauptraumzerlegung (LA). Wir merken uns an dieser Stelle:

### Satz 2.2.6 (Fundamentalsysteme für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}, A \in \mathbb{K}^{N \times N}, \sigma(A) = \text{spec}(A) = \{ \text{Eigenwerte von } A \}$ , dann gilt:

1. Ist  $v$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , so ist  $y(x) = e^{\lambda x}v$  Lösung von  $y' = Ay$ .
2. Gibt es eine Basis  $v_1, \dots, v_N$  von Eigenvektoren zu Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  (oder mit Vielfachheit aufgeführt) zu  $\mathbb{K}^N$ , so bilden die Funktionen

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}v_1, \dots, y_N(x) = e^{\lambda_N x}v_N$$

ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung  $y' = Ay$ .

3. Sind  $v_1^{(\lambda)}, \dots, v_{n(\lambda)}^{(\lambda)}$  Basen der Haupträume  $H_\lambda = \ker(\lambda - A)^{m(\lambda)} = \ker(\lambda - A)^{m(\lambda)+1}$ ,  $\lambda \in \sigma(A)$ ,  $m(\lambda) \in \mathbb{N}$  minimal so bilden die Funktionen

$$y_1^{(\lambda)}(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{x^k}{k!} (A - \lambda \mathbb{E})^k v_j^{(\lambda)}, 1 \leq j \leq n(\lambda), \lambda \in \sigma(A)$$

ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung  $y' = Ay$ .

□

Der eben formulierte Satz erlaubt die Berechnung der Allgemeinen Lösung des Systems  $y' = Ay$  allein mit Methoden der Linearen Algebra. In jeden Fall, also auch im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  empfiehlt es sich über  $\mathbb{C}$  also in  $\mathbb{R}^N \oplus i\mathbb{R}^N$  zu rechnen; dann ist  $\bar{A} = A$ . In jeder Lösung  $y$  von  $y' = Ay$  hat als Komponentenfunktion Linearkombination von  $x^k e^{\lambda x}$ ,  $\lambda \in \sigma(A)$ ,  $0 \leq k \leq m(\lambda) - 1$ . Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  gilt:

**Korollar 2.2.7 (Reelles Fundamentalsystem)** Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  so erhält man ein reelles Fundamentalsystem indem man für  $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}$  die  $v_j^{(\lambda)}$  reell und für jedes Paar  $\lambda, \bar{\lambda} \in \sigma(A)$ ,  $\lambda = \alpha + i\beta$  nicht reeller Eigenwerte die  $v_j^{(\lambda)}, v_j^{(\bar{\lambda})}$  konjugiert komplex wählt ( $v_j^{(\bar{\lambda})} = \overline{v_j^{(\lambda)}}$ ) sowie  $v_j^{(\lambda)}, v_j^{(\bar{\lambda})}$  durch  $\operatorname{Re}(v_j^{(\lambda)}), \operatorname{Im}(v_j^{(\lambda)})$  ersetzt. Die Komponenten der reellen Lösungen von  $y' = Ay$  sind dann Linearkombinationen der folgenden Basisvektoren:

$$x^k e^{\lambda x}, \lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}, x^k e^{\alpha x} \begin{pmatrix} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{pmatrix}, \lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A) \setminus \mathbb{R}, 0 \leq k \leq m(\lambda) - 1$$

□

**Beispiele**

1.  $y' = Ay + b$  mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2e^x \end{pmatrix}$  und Anfangsbedingungen  $y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}y \Leftrightarrow y'_1 = -y_2, y'_2 = y_1$ . Wir betrachten zunächst das homogene System  $y' = Ay$ . Die Charakteristische Gleichung für dieses System lautet:  $\lambda^2 + 1 = 0$  und somit ist  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Somit sind die Eigenvektoren der Matrix:

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das reelle Fundamentalsystem ist daher:

$$W(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \text{ und}$$

$$y_h(x) = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

Mit  $W^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2e^x \end{pmatrix}$  ist dann

$$\begin{aligned} \int_0^x W^{-1}(s)b(s)ds &= \int_0^x \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \sin x + e^x(\sin x - \cos x) + 1 \\ \cos x + e^x(\cos x + \sin x) - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Und daher die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} y(x) &= W(x)[y(0) + \int_0^x W^{-1}(s)b(s)ds] = \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin x + e^x(\sin x - \cos x) + 1 \\ \cos x + e^x(\cos x + \sin x) - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^x \\ 1 + e^x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Wir suchen ein Fundamentalsystem zu  $y' = Ay$  mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Die

Charakteristische Gleichung ist  $0 = \det(A - \lambda\mathbb{E}) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1, m_{\lambda_1} = 2, \lambda_2 = -1, m_{\lambda_2} = 1$ . Zu zugehörigen Eigenvektoren sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit fehlt uns der 3. Eigenvektor. Wir müssen hier die Hauptraumzerlegung anwenden. Einen Hauptraum erhalten wir, indem wir  $\ker(A - \lambda_1\mathbb{E})^2$  betrachten.

$$(A - \lambda_1\mathbb{E})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} v_3 = 0 \Leftrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch:

$$y_1^{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$$

$$y_2^{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$\begin{aligned} y_3^{\lambda_1} &= e^x \sum_{k=0}^1 \frac{x^k}{k!} (A - \lambda_1\mathbb{E})^k v_3 = \\ &= e^x \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^x \begin{pmatrix} 1 + 2x \\ 1 - x \\ 1 + x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist die Basis gegeben durch:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}, e^x \begin{pmatrix} 1 + 2x \\ 1 - x \\ 1 + x \end{pmatrix} \right\}$$

□

**Bemerkung** Im Beispiel (2) liefert auch der Ansatz  $(A - \lambda_1 \mathbb{E})v_3 = v_1$  einen Hauptvektor  $v_3$ . Denn  $v_1$  Eigenvektor zu  $A$ , so gilt  $(A - \lambda_1 \mathbb{E})v_1 = 0$ , damit ist  $(A - \lambda_1 \mathbb{E})^2 v_3 = 0$  äquivalent zu  $(A - \lambda_1 \mathbb{E})v_3 = v_1$ .

□

## 2.3 Hauptsätze über Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Daten

**Satz 2.3.1 (von Picard-Lindelöf)** Sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \supset [\tau - \delta, \tau + \delta] \times B_r(\eta_0) \rightarrow \mathbb{K}^N$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$  stetig,  $\eta_0 \in \mathbb{K}^N$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $0 < r, \delta \leq \infty$ . Weiter besitze  $f$  die folgenden Eigenschaften:

(B)  $\|f(x, \eta)\| \leq M < \infty$  Beschränktheit.

(L)  $\|f(x, \eta) - f(x, \tilde{\eta})\| \leq L\|\eta - \tilde{\eta}\|$  (partielle Lipschitz-Bedingung)

Für alle  $x \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$ ,  $\eta, \tilde{\eta} \in B_r(\eta_0)$ . Dann existiert auf jedem Intervall  $[\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$  mit  $0 \leq \varepsilon \leq \min\{\delta, \frac{r}{M}\}$  genau eine Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x, y)$  auf  $[\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ ,  $y(\tau) = \eta_0$ , und diese verläuft ganz in der Kugel  $B_r(\eta_0)$ .

□

Zu diesem Satz gibt es auch eine lokale Version die keine Bedingung der Form (2.3.1) verlangt, dafür aber auch keine Aussage über die Größe des Existenzintervalls macht.

**Satz 2.3.2 (Lokaler Existenz und Eindeutigkeitsatz)** Sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{Nm} \supset D \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig und bezüglich der  $\mathbb{K}^{Nm}$  Variablen lokal partiell Lipschitz stetig auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{Nm}$ . Dann gilt:

1. (Lokaler Existenzsatz) Zu jedem Satz von Anfangsdaten  $(\tau, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in D$  gibt es eine Größe  $\varepsilon > 0$ , so dass auf jedem Intervall  $[\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$  mit  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  das Anfangswertproblem  $y^{(m)} = f(x, y, \dots, y^{(m-1)})$ ,  $y^{(l)}(\tau) = \eta_l$  für  $0 \leq l \leq m - 1$  eine Lösung besitzt.
2. (Eindeutigkeit) Zu jedem Intervall  $I$  mit  $\tau \in I$  und  $(\tau, \eta_0, \dots, \eta_{m-1}) \in D$  gibt es höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems  $y^{(m)} = f(x, y, \dots, y^{(m-1)})$ ,  $y^{(l)}(\tau) = \eta_l$ ,  $0 \leq l \leq m - 1$  auf  $I$ . (Eventuell gibt es auch keine, falls  $I$  zu groß ist!)

□

**Bemerkung** Dass  $f$  bezüglich der  $\mathbb{K}^{Nm}$ -Variablen lokal partiell Lipschitz-stetig ist, bedeutet nichts anderes, als dass es zu jedem Punkt aus  $D$  eine Umgebung  $U$  und ein  $L < \infty$  gibt, so dass

$$\|f(x, y_0, \dots, y_{m-1}) - f(x, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{m-1})\| \leq L \sum_{l=0}^{m-1} \|y_l - \tilde{y}_l\|$$

für alle  $(x, y_0, \dots, y_{m-1}), (x, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{m-1}) \in U$  gilt. Der Schrankensatz garantiert die Gültigkeit dieser Bedingung, wenn  $f(x, y_0, \dots, y_{m-1})$  bezüglich der Variablen  $y = (y_0, \dots, y_{m-1}) \in \mathbb{K}^{Nm}$  differenzierbar ist mit lokal beschränkter Norm  $\|D_y f(x, y)\|$ , etwa im Fall  $D_y f(x, y)$  stetig auf  $D$ .

□

Die Eindeigkeitsaussage geht verloren, wenn man auf die partielle Lipschitz-Bedingung verzichtet und statt dessen nur Stetigkeit fordert.

**Satz 2.3.3 (Existenzsatz von Peano)** Sei  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{Nm}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig. Dann hat jedes Anfangswertproblem  $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(m-1)})$ ,  $y^{(l)}(\tau) = \eta_l$  für  $0 \leq l \leq m-1$  mit Anfangsdaten  $(\tau, \eta_0, \dots, \eta_{m-1}) \in D$  lokal eine Lösung, das heißt auf einem kleineren (offenen) Intervall um  $\tau$ .

□

**Satz 2.3.4 (Maximale Lösung)** Sei  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig und partiell Lipschitz-stetig bezüglich der  $\mathbb{K}^N$ -Variablen. Dann gilt:

1. Zu jedem Anfangsdatum  $(\tau, \eta_0) \in D$  gibt es ein maximales Intervall  $I_{\max} \subset \mathbb{R}$  mit  $\tau \in I_{\max}$  derart, dass das Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$ ,  $y(\tau) = \eta_0$  auf  $I_{\max}$  eine Lösung besitzt. Jede Lösung des Anfangswertproblems auf einem Intervall  $I$  ist die Einschränkung  $y|_I$  der maximalen Lösung.
2.  $I_{\max}$  ist ein offenes Intervall  $(x_-, x_+)$  mit  $-\infty < x_- < \tau < x_+ < +\infty$ . Bei  $x \rightarrow x_-$  von oben und  $x \rightarrow x_+$  von unten verläßt  $(x, y(x))$  jede beschränkte Teilmenge  $A \subset D$ , die eine Parallelmengens  $A_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N : \text{dist}((x, y), A) \leq \varepsilon\}$  in  $D$  besitzt, auf der  $f$  beschränkt ist, endgültig. Das bedeutet, dass  $(x, y(x)) \notin A$  für alle  $x \in (x_-, x_+)$  die nahe genug bei  $x_+$  bzw.  $x_-$  liegen. Insbesondere verläßt  $(x, y(x))$  jede kompakte Teilmenge von  $D$  endgültig.

### Beweis

1. Wir definieren  $I_{\max}$  als die Vereinigung aller (Existenz-)Intervalle von Lösungen des Anfangswertproblems und  $y$  als die Vereinigung entsprechender Lösungen. Offenbar ist  $y$  wohldefiniert da der Eindeigkeitsatz gilt.

2. Angenommen es gelte  $x_+ = \sup I_{\max} \in I_{\max}$ . Dann ließe sich  $y$  durch die lokale Lösung  $\tilde{y}$  des Anfangswertproblems  $\tilde{y}' = f(x, \tilde{y}), \tilde{y}(x_+) = y(x_+)$  über den Punkt  $x_+$  hinaus fortsetzen, was der Maximalität dieses Intervalls widerspricht. Das heißt es muss  $x_+ = \sum I_{\max} \notin I_{\max}$  gelten, also  $I_{\max}$  offen, ebenso  $x_- := \inf I_{\max} \notin I_{\max}$ , so dass  $I_{\max} = (x_-, x_+)$  offen ist!  
 Seien nur  $A$  und  $A_\varepsilon$  wie in der Formulierung des Satzes und  $M := \sup \|f\| < \infty$ . Angenommen es gäbe eine Folge  $x_n \rightarrow x_+$  von unten mit  $(x_n, y(x_n)) \in A \forall n \in \mathbb{N}$ . Da  $A$  beschränkt ist, muss  $x_+ < \infty$ . Gibt es nun Punkte  $x \in (x_n, x_+)$  mit  $\text{dist}((x, y(x)), A) \geq \varepsilon$ , so könnte man ein minimales  $x_n^*$  finden, so dass  $x_n^* \in (x_n, x_+)$  und  $(x, y(x)) \in A_\varepsilon$  für alle  $x_n \leq x \leq x_n^*$  ist (und bei  $x_n^*$  natürlich  $\text{dist}((x_n^*, y(x_n^*)), A)$  gilt). Folglich hat man

$$\|y'(x)\| = \|f(x, y(x))\| \leq M \wedge \|y(x) - y(x_n)\| \leq M|x - x_n| \forall x_n \leq x \leq x_n^*.$$

Da  $(x_n, y(x_n)) \in A$  zu  $(x_n^*, y(x_n^*))$  einen Abstand  $\geq \varepsilon$  hat folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|(x_n, y(x_n)) - (x_n^*, y(x_n^*))\| = \\ &= \|x_n - x_n^*\| + \|y(x_n) - y(x_n^*)\| \leq (1 + M)|x_n - x_n^*| \leq (1 + M)(x_+ - x_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Bei  $n \rightarrow \infty$  - somit haben wir dies zum Widerspruch geführt. Die Annahme, dass es Punkte  $x \in (x_n, x_+)$  mit  $\text{dist}(x, y(x)) \geq \varepsilon$  gibt, führt zu einem Widerspruch für große  $n$ . Also:

$$\text{dist}((x, y(x)), A) < \varepsilon \wedge \|y'(x)\| \leq M \forall x \in [x_n, x_+),$$

wenn  $n$  hinreichend groß ist. Dies bedeutet insbesondere, dass  $y \in [x_n, x_+)$  eine Lipschitz-Bedingung erfüllt und daher der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_+} y(x) = \eta_+$  nach dem Cauchy-Kriterium existiert. Offenbar ist  $(x_+, \eta_+) \in \bar{A} \subset A_\varepsilon \subset D$ . Wendet man den lokalen Existenzsatz bei  $(x_+, \eta_+)$  an, dann erhält man eine Lösung  $\tilde{y}$  auf  $[x_+, x_+ + \delta]$  mit einem  $\delta > 0$  und  $\tilde{y}(x_+) = \eta_+$ .  $\tilde{y}(x_+) = \eta_+ = \lim_{x \rightarrow x_+} y(x)$  setzt die Lösung  $y$  stetig fort. Aus  $g'(x_+) = f(x_+, \eta_+) = \lim_{x \rightarrow x_+} f(x, y(x)) = \lim_{x \rightarrow x_+} y'(x)$  folgt, dass die Fortsetzung auch stetig differenzierbar ist. Mithin ist  $\tilde{y}$  Fortsetzung von  $y$  über  $I_{\max}$  hinaus, im Widerspruch zur Maximalität von  $I_{\max}$ . Somit war unsere Annahme, dass es eine Folge  $x_n \rightarrow x_+$  mit  $(x_n, y(x_n)) \in A \forall n \in \mathbb{N}$  gibt, falsch, das heißt es gilt  $(x, y(x)) \notin A$  für alle  $x$  nahe genug bei  $x_+$ .

Zum Abschluss überzeugen wir uns davon, dass die Argumentation insbesondere für kompakte Mengen  $A$  anwendbar ist: Setze  $M = 1 + \sup_A \|f\| < +\infty$ ,  $U = \{z \in D : \|f(z)\| < M\}$  offen und  $U \supset A$ ,  $2\varepsilon := \text{dist}(A, \mathbb{K}^N \setminus U) > 0$  (da  $A$  kompakt). Dann ist  $A \subset A_\varepsilon U \subset D$  und  $\|f\| \leq M$  auf  $A_\varepsilon$ .

□

**Geometrische Interpretation** (das Satzes von maximalen Lösung) Ist  $D = J \times G$  mit  $G$  offen in  $\mathbb{K}^N$ , so bedeutet dies im Fall  $x_+ < \sup J$ , das die Lösung bei  $x \rightarrow x_+$  gegen den Rand von  $D$  oder Norm nach gegen  $\infty$  strebt, oder beides, und zwar in dem Sinn, dass

$$\min\{\text{dist}(y(x), \partial D), \frac{1}{1 + \|y(x)\|}\} \rightarrow 0, x \rightarrow x_+.$$

**Satz 2.3.5 (Existenz von Lösungen auf einem vorgegebenen Intervall)** Sei  $J$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{K}^N$  offen und  $f : J \times G \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig und partiell Lipschitz-stetig. Dann existiert die maximale Lösung  $y$  eines Anfangswertproblems  $y' = f(x, y)$ ,  $y(\tau) = \eta_0$  auf dem vorgegebenen Intervall  $J$ , wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

1.  $y(x)$  ist periodisch:  $y(x) = y(x + C)$ ,  $C > 0 \forall x \in J, x + C \in J$ ; im autonomen Fall genügt sogar

$$y(x_1 + C) = y(x_1), x_1 \in J.$$

2. Die Lösungsbahn  $\{y(x) : x_- < x < x_+\}$  hat kompakten Abschluss in  $G$ .
3.  $G = \mathbb{K}^N$  und  $f$  erfüllt eine lineare Wachstumsbedingung  $\|f(x, y)\| \leq a(x)\|y(x)\| + b(x) \forall (x, y) \in J \times \mathbb{K}^N$  mit stetigen Funktionen  $a, b : J \rightarrow [0, \infty)$ .
4. Die Differentialgleichung ist selbst schon linear, das heißt  $y' = A(x)y + B(x)$  auf  $J$  mit  $A \in C^0(J, \mathbb{K}^{N \times N}), B \in C^0(J, \mathbb{K}^N)$ .

**Beweis** Man kann ohne Beschränkung annehmen, dass  $J$  offen ist, denn ansonsten setzt man im Fall  $x_* = \sup J \in J$  die Differentialgleichung durch  $f(x, y) = f(x_*, y)$  für  $x > x_*$  und  $y \in \mathbb{K}^N$  auf  $J \cup (x_*, \infty)$  fort. Dabei bleiben Stetigkeit und auch die partielle Lipschitz-Bedingung erfüllt. Die maximalen Lösungen der fortgesetzten Differentialgleichung ergeben nach Einschränkung auf  $J$  die Maximalen Lösungen des ursprünglichen Problems.

1. In diesem Fall ist  $y((x_-, x_+)) = y([x_-, x_+])$  kompakt, so dass sich (2) anwenden lässt. Im autonomen Fall ist mit  $y(x)$  auch  $y(x) + C$  Lösung. Mit der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblem folgt aus  $y(x_1) = y(x_1 + C)$  auch bereits  $y(x) = y(x + C) \forall x \in J, x + C \in J$ .
2. Besitzt  $y((x_-, x_+))$  kompakten Abschluss  $A \subset G$ , so verläßt  $y(x)$  bei  $x \rightarrow x_+$  und  $x \rightarrow x_-$  die kompakte Menge  $A$  nicht, also muss nach dem Satz von der Maximalen Lösung  $x_+ = \sup J, x_- = \inf J$  sein.
3. Da  $a(x)$  und  $b(x)$  auf kompakten Teilmengen  $I \subset J$  beschränkt sind, gilt  $\|f(x, y)\| \leq a_I \|y\| + b_I$  mit Konstanten  $a_I, b_I \in [0, \infty)$  für  $x \in I, y \in \mathbb{K}^N$ . Der nachfolgende Abschätzungssatz garantiert dann, dass die Menge



$\{\|y(x)\| \mid x \in I\}$  beschränkt ist. Der Satz über die maximale Lösung impliziert dann wieder  $J = (x_-, x_+)$ .

4. Wegen  $\|A(x)y + B(x)\| \leq \|A(x)\|\|y\| + \|B(x)\|$  läßt sich (3) anwenden mit  $a(x) = \|A(x)\|, b(x) = \|B(x)\|$ .

□

**Satz 2.3.6 (Abschätzung für Differentialgleichungen)** Sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \supset D \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig auf der offenen Menge  $D$  und  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^N$  eine Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x, y)$  auf  $I, y(\tau) = \eta_0$ .

1. Erfüllt die rechte Seite von  $f$  eine lineare Wachstumsbedingung

$$\|f(x, y)\| \leq a(\|y\| + b), a, b \in [0, \infty) \subset D,$$

so gilt:

$$\|y(x)\| \leq (\|\eta_0\| + b)e^{a|x-\tau|} - b, x \in I.$$

2. Erfüllt  $f$  eine partielle Lipschitz-Bedingung

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|, L > 0,$$

auf  $D$  und ist  $\tilde{y} \in C^1(I, D)$  beliebige Näherungslösung so ist die Differenz von  $y$  zu  $\tilde{y}$  abgeschätzt durch

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \left(\frac{\gamma}{L} + C\right)e^{L|x-\tau|} - \frac{\gamma}{C},$$

auf  $I$ , wobei  $C := \|\tilde{y}(\tau) - \eta_0\|$  die Abweichung der Anfangswerte und  $\gamma := \sup_I \|\tilde{y}'(x) - f(x, \tilde{y}(x))\|$  der Defekt von  $\tilde{y}$ , also die Abweichung von der Differentialgleichung bei  $\tilde{y}$ , ist.

**Beweis**

1. Aus  $y' = f(x, y)$  folgt  $\|y'(x)\| = \|f(x, y)\| \leq a(\|y(x)\| + b)$ .
2.  $\|(y(x) - \tilde{y}(x))'\| = \|f(x, y(x)) - \tilde{y}'(x)\| \leq \|f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))\| + \underbrace{\|f(x, \tilde{y}(x)) - \tilde{y}'(x)\|}_{\sup_I \|f(x, \tilde{y}) - \tilde{y}'\|} \leq L\|y(x) - \tilde{y}(x)\| + \gamma = L(\|y(x) - \tilde{y}(x)\| + \frac{\gamma}{L})$ .

Daher folgt in beiden Fällen die Aussage des Satzes aus dem folgenden

□

**Lemma 2.3.7 (von Gronwall)** *Angenommen  $y \in C^1(I, \mathbb{K}^N)$  genügt der Differentialgleichung*

$$\|y'\| \leq a(\|y\| + b),$$

auf  $I$  mit  $a, b \in [0, \infty)$ . Dann gilt

$$\|y(x)\| \leq (\|y(\tau)\| + b)e^{a|x-\tau|} - b, \quad \forall x, \tau \in I.$$

**Beweis** Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass  $x \geq \tau$  ist. Ansonsten betrachte  $y(-x)$  als Lösung von  $\frac{d}{dx}y(-x) = -f(-x, y(-x))$ . Zunächst formen wir die Differentialgleichung in eine Integralungleichung um. Das geht wie folgt:

$$\begin{aligned} \|y(x)\| &\leq \|y(\tau)\| + \|y(x) - y(\tau)\| = \|y(\tau)\| + \left\| \int_{\tau}^x y'(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \|y(\tau)\| + \int_{\tau}^x \|y'(s)\| ds \leq \|y(\tau)\| + \int_{\tau}^x (a\|y(s)\| + b) ds =: \phi(x), \end{aligned}$$

somit folgt

$$\phi'(x) = a(\|y(x)\| + b) \leq a(\phi(x) + b), \quad \forall \tau \leq x \in I.$$

Für  $b > 0$  ergibt sich

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x) + b} \leq a, \quad \forall \tau \leq x \in I.$$

Integration dieser Ungleichung liefert

$$\log(\phi(x) + b) - \log(\phi(\tau) + b) = \int_{\tau}^x \frac{\phi'(s)}{\phi(s) + b} ds \leq \int_{\tau}^x a ds = a(x - \tau).$$

Daraus erhalten wir

$$\phi(x) + b \leq (\phi(\tau) + b)e^{a(x-\tau)},$$

und dies gilt auch im Fall  $b = 0$  (lasse  $b \rightarrow 0$  (von oben) streben). Beachte nun noch, dass  $\phi(\tau) = \|y(\tau)\|$  und nach oberer Ungleichung  $\phi(x) \geq \|y(x)\|$  gilt und erhalten:

$$\|y(x)\| + b \leq (\|y(\tau)\| + b)e^{a(x-\tau)},$$

also die behauptete Ungleichung im Fall  $x \geq \tau$ . □

**Bemerkung**

1. Aus (2) des Abschätzungssatzes ergibt sich insbesondere die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems auf  $I$  ( $\gamma = c = 0$ ).
2. (1) impliziert die Beschränktheit von  $\|y(x)\|$  auf beschränkten Teilintervallen von  $I$ .

□

**Satz 2.3.8 (Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten)** Sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig und lokal partiell-Lipschitz stetig bezüglich  $\mathbb{K}^N$ -Variablen,  $D$  offen,  $I = [\alpha, \beta]$  ein kompaktes Intervall. Dann hängt die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x, y)$  auf  $I$ ,  $y(\tau) = \eta_0$  (mit  $\tau \in I$ ,  $(\tau, \eta_0) \in D$ ) im folgenden Sinn stetig von  $\tau, \eta_0$  und  $f$  ab. Zu jeder Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^N$ , Umgebung  $U$  von  $\text{Graph}(y)$  in  $D$ , Konstanten  $C < \infty$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass die Lösung der gestörten Anfangswertproblems  $\tilde{y}' = \tilde{f}(x, \tilde{y})$ ,  $\tilde{y}(\tilde{\tau}) = \tilde{\eta}_0$  auf  $I$  existiert und Abstand  $\leq \varepsilon$  zu  $y$  besitzt, das heißt es gelte

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I,$$

sofern  $\tilde{\tau} \in I$ ,  $\tilde{\eta}_0 \in \mathbb{K}^N$  sind mit  $|\tau - \tilde{\tau}| \leq \delta$ ,  $\|\eta_0 - \tilde{\eta}_0\| \leq \delta$  und wenn  $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig und partiell Lipschitz-stetig ist mit

$$(V1) \quad \|f - \tilde{f}\| \leq \delta \text{ auf } U.$$

$$(V2) \quad \|f - \tilde{f}\| \leq \delta \text{ auf } \text{Graph}(y) \text{ und } \|\tilde{f}(x, \eta) - \tilde{f}(x, \tilde{\eta})\| \leq C\|\eta - \tilde{\eta}\| \text{ auf } U.$$

**Beweis** Da  $\text{Graph}(y)$  kompakt ist, gibt es in  $U$  einen Streifen  $A_\varrho = \{(x, \eta) : x \in I, \|\eta - y(x)\| \leq \varrho\}$  um  $\text{Graph}(y)$  herum mit  $0 < \varrho \leq \varepsilon$ . Man kann  $\varrho$  so klein wählen, dass  $y$  auf  $[\alpha - \varrho, \beta + \varrho]$  fortsetzbar ist, wobei der Graph der Fortsetzung in einer Parallelmenge  $U_\varrho$  zu  $A_\varrho$  liegt, die selbst noch in  $U$  enthalten ist, das heißt  $U_\varrho \subset U$ . Außerdem kann man annehmen, dass  $M := \sup \|f\| < \infty$  und dass  $f$  auf  $U_\varrho$  eine partielle Lipschitz-Konstante  $L$  hat (beachte, dass  $f$  auf einer Umgebung von  $\text{Graph}(y)$  wegen der Kompaktheit von  $\text{Graph}(y)$  partiell Lipschitz-stetig ist). Für  $(\tilde{\tau}, \tilde{\eta}_0) \in D$  und  $\tilde{f}$  wie in der Voraussetzung des Satzes betrachten wir im folgenden die (nicht weiter fortsetzbare) maximale Lösung  $\tilde{y} : (\tilde{x}_-, \tilde{y}_+) \rightarrow \mathbb{K}^N$  des Anfangswertproblems  $\tilde{y}' = \tilde{f}(x, \tilde{y})$ ,  $\tilde{y}(\tilde{\tau}) = \tilde{\eta}_0$ . Sei  $J := [\alpha, \beta] \cap (\tilde{x}_-, \tilde{x}_+)$  und  $x \in J$  mit der Eigenschaft, dass  $\text{Graph}(\tilde{y}|_{[\tilde{\tau}, x]}) \subset U_\varrho$  ist (für  $x < \tilde{\tau}$  vertausche  $\tilde{\tau}$  mit  $x$ ). Im Fall der Voraussetzung (1) fassen wir  $\tilde{y}$  als Störung von  $y$  auf. Dann zeigt Teil (2) des Abschätzungssatzes

$$\|\tilde{y}(x) - y(x)\| \leq \left(\frac{\gamma}{L} + \Delta\right)e^{L(x-\tilde{\tau})}, \quad \gamma := \sup_{[\tilde{\tau}, x]} \|\tilde{y}' - f(\cdot, \tilde{y})\|,$$

und somit folgt

$$\Delta := \|\tilde{y}(\tilde{\tau}) - y(\tilde{\tau})\|.$$

Da  $\tilde{y}' = \tilde{f}(\cdot, \tilde{y})$  löst, ergibt sich

$$\gamma = \sup_{[\tilde{\tau}, x]} \|\tilde{f}(\cdot, \tilde{y}) - f(\cdot, \tilde{y})\| \leq \sup_{U_\varrho} \|f - \tilde{f}\| \leq \sup_U \|f - \tilde{f}\| \leq \delta.$$

Im Fall der Voraussetzung (2) fassen wir  $y$  als Störung von  $\tilde{y}$  auf und erhalten mit Teil (2) des Abschätzungssatzes

$$\|\tilde{y}(x) - y(x)\| \leq \left(\frac{\gamma}{C} + \Delta\right)e^{C|x-\tilde{\tau}|},$$

mit  $\gamma := \sup_{[\tilde{\tau}, x]} \|y' - \tilde{f}(\cdot, y)\|$ ,  $\Delta := \|\tilde{y}(\tilde{\tau}) - y(\tilde{\tau})\|$ . In diesem Fall löst  $y$  die Differentialgleichung  $y' = f(\cdot, y)$  und wir erhalten

$$\gamma = \sup_{[\tilde{\tau}, x]} \|f(\cdot, y) - \tilde{f}(\cdot, y)\| \leq \sup_{\Gamma(y)} \|f - \tilde{f}\| \leq \delta.$$

In beiden Fällen ist  $\Delta \leq \|\eta_0 - \tilde{\eta}_0\| + \|y(\tau) - y(\tilde{\tau})\|$ . Somit kann man  $\delta$  so klein machen, dass  $(\tilde{\tau}\tilde{\eta}_0) \in A_\varrho$  und

$$\left\{ \begin{array}{l} \|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \varrho, \text{ also } \Gamma(\tilde{y}|_{[\tilde{\tau}, x]}) \subset A_\varrho \\ \text{wenn } x \in J \text{ mit } \Gamma(\tilde{y}|_{[\tilde{\tau}, x]}) \subset U_\varrho \end{array} \right. .$$

Dies bedeutet aber, dass  $(x, \tilde{y}(x))$  die Menge  $A_\varrho$  nicht verlassen kann. Bei  $x \rightarrow \tilde{x}_+$ ,  $x \rightarrow \tilde{x}_-$  muss  $(x, \tilde{y}(x))$  die Parallelmengemenge  $A_\varrho$  aber verlassen, denn  $A_\varrho$  besitzt selbst eine Parallelmengemenge  $U_\varrho$  auf der  $\tilde{f}$  beschränkt ist. Im Fall von (1) hat man  $\|\tilde{f}\| \leq \|f - \tilde{f}\| + \|f\| \leq M + \delta$  auf  $U_\varrho$ . Im Fall (2) gilt zunächst auf  $\text{Graph}(y)$  die Abschätzung  $\|\tilde{f}\| \leq \|f - \tilde{f}\| + \|f\| \leq M + \delta$ . Für  $(x, \eta) \in U_\varrho$  hat man  $\|\tilde{f}(x, \eta)\| \leq \|\tilde{f}(x, y(x))\| + \|f(x, y(x)) - \tilde{f}(x, \eta)\| \leq M + \delta + C\|y(x) - \eta\| \leq M + \delta + C\varrho$ . Also können  $\tilde{x}_+$ ,  $\tilde{x}_-$  nicht in  $[\alpha, \beta]$  liegen, das heißt  $\tilde{y}$  ist  $[\alpha, \beta]$  definiert und  $\|\tilde{y}(x) - y(x)\| \leq \varrho \leq \varepsilon$  für alle  $x \in [\alpha, \beta]$ . □

Wir führen nun eine neue Bezeichnung ein, die es ermöglicht, den Satz über die stetige Abhängigkeit von den Daten einfacher zu formulieren. Dabei wollen wir die rechte Seite  $f$  nunmehr nicht mehr beliebig stören, sondern annehmen, dass  $f$  von Parametern  $p$  abhängt. Deren Änderung bewirkt die Änderung von  $f = f(\cdot, \cdot, p)$  und damit auch von der Lösung  $y(\cdot, p)$ .

**Definition 2.3.9** Sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \supset D \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig und lokal partiell Lipschitz-stetig bezüglich der  $\mathbb{K}^N$ -Variablen auf der offenen Menge  $D$ . Die charakteristische Funktion zur Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  ist die Abbildung

$$(x, \tau, \eta) \mapsto y(x, \tau, \eta) = \begin{cases} \text{Wert an der Stelle } x \\ \text{der maximalen Lsg. des} \\ \text{Anfangswertproblems } y' = f(x, y), y(\tau) = \eta \end{cases} .$$

Der Definitionsbereich  $\{(x, \tau, \eta) \in \mathbb{R} \times D : x_-(\tau, \eta) < x < x_+(\tau, \eta)\}$ , wobei  $(x_-(\tau, \eta), x_+(\tau, \eta))$  das Existenzintervall der maximalen Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangsdaten  $(\tau, \eta)$  ist. Die assoziierten Abbildung

$$\phi_{x,\tau} : \eta \mapsto y(x, \tau, \eta) = \begin{cases} \text{Wert der Lsg. zur Zeit} \\ x, \text{ die zur Zeit } \tau \\ \text{den Wert } \eta \text{ hat} \end{cases} ,$$

heißten Evolutionsooperatoren. Im Fall einer autonomen Differentialgleichung  $y' = f(y)$  mit einem lokal Lipschitz-stetigen Vektorfeld  $f : \mathbb{K}^N \supset D \rightarrow \mathbb{K}^N$  heißen die Abbildungen

$$\phi_x : \eta \mapsto \phi_x(\eta) := y(x, 0, \eta) = y(x + \tau, \tau, \eta),$$

Flussabbildungen und die Familie von Abbildungen  $(\phi_x)_{x \in \mathbb{R}}$  (bzw. die Abbildung  $(x, \eta) \mapsto \phi_x(\eta)$ ) der lokale Fluss des Vektorfeldes bzw. des Differentialgleichungssystems. Der Definitionsbereich von  $\phi_x$  ist  $\{\eta \in D : x_-(\eta) < x < x_+(\eta)\}$ , wobei  $(x_-(\eta), x_+(\eta))$  das Existenzintervall der maximalen Lösung mit Anfangswert  $\eta$  zur Zeit  $x = 0$  ist. Falls  $P$  ein metrischer Raum (Parameterraum) ist und  $f : D \times P \rightarrow \mathbb{K}^N$  derart, dass für jede Wahl von  $p \in P$  die Abbildung  $f(\cdot, \cdot, p)$  die oben an  $f$  gestellten Voraussetzungen erfüllt, so sei mit  $(x, \tau, \eta) \mapsto y(x, \tau, \eta, p)$  die charakteristische Funktion zur Differentialgleichung  $y' = f(x, y, p)$  bezeichnet. Dann heißt  $(x, \tau, \eta, p) \mapsto y(x, \tau, \eta, p)$  die charakteristische Funktion des parameterabhängigen Differentialgleichungssystems (Definitionsbereich  $\subset \mathbb{R} \times D \times P$ ).

□

Mit diesen Bezeichnungen können wir den Satz über die stetige Abhängigkeit von Daten wie folgt formulieren:

**Satz 2.3.10 (Stetigkeitssatz)** Sei  $D$  offene Menge in  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ ,  $P$  ein metrischer Raum,  $f : D \times P \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig und auf  $D \times P$  partiell Lipschitz-stetig, das heißt zu jedem  $(x_0, \eta_0, p_0) \in D \times P$  existiert eine Umgebung in  $D \times P$ , so dass  $\|f(x, \eta, p) - f(x, \tilde{\eta}, p)\| \leq L\|\eta - \tilde{\eta}\|$  gilt für alle  $(x, \eta, p), (x, \tilde{\eta}, p)$  aus dieser Umgebung und zwar mit einer von  $(x, p)$  unabhängigen Konstanten  $L < \infty$ . Dann gilt:

1. Die Lebensdauerfunktion  $x_{\pm} : D \times P \ni (\tau, \eta, p) \mapsto x_{\pm}(\tau, \eta, p) \in [-\infty, \infty]$  der maximalen Lösung zu  $y' = f(x, y, p), y(\tau) = \eta$  sind ober-/unterhalbstetig.

2. Der Definitionsbereich der charakteristischen Funktion  $(x, \tau, \eta, p) \mapsto y(x, \tau, \eta, p)$  ist offen in  $\mathbb{R} \times D \times P$ .
3. Die charakteristische Funktion ist darauf stetig.

□

### Bemerkungen

1. (1) sagt aus, dass sich die Lebenszeiten  $x_{\pm}(\tau, \eta, p)$  bei Abänderung von  $(\tau, \eta, p)$  nicht sprunghaft verkleinern bzw. vergrößern.
2. (2) besagt, dass mit  $y'_0 = f(x, y_0, p_0)$  auf  $[\alpha, \beta]$ ,  $y_0(\tau_0) = \eta_0$  auch die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x, y, p)$ ,  $y(\tau) = \eta$  auf  $[\alpha, \beta]$  existiert, sofern  $(\tau, \eta, p)$  hinreichend nahe bei  $(\tau_0, \eta_0, p_0)$  liegt.
3. Setzt man  $P = \{p\}$ , so erhält man den parameterunabhängigen Fall; lasse  $P, p$  in den Formulierungen einfach weg.

□

### Weitere Anmerkungen

1. Für die charakteristische Funktion einer Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  hat man folgende Identitäten:
  - (i)  $y(\tau, \tau, \eta) = \eta$ .
  - (ii)  $y(\tau, x, y(x, \tau, \eta)) = \eta$ .
  - (iii)  $y(x, s, y(s, \tau, \eta)) = y(x, \tau, \eta)$ .

Dies gilt jeweils, wenn die linken Seiten definiert sind. (1i) besagt, dass die Lösung  $x \mapsto y(x, \tau, \eta)$  des Anfangswertproblems mit Anfangsdaten  $(\tau, \eta)$  eben den Wert  $\eta$  bei  $\tau$  annimmt. (1iii) bedeutet nichts anderes, als dass die Vereinigung der Lösung  $y$  auf  $[\tau, s]$  des Anfangswertproblems mit Anfangsdaten  $(\tau, \eta)$  mit der Lösung  $[s, x]$  des Anfangswertproblems mit Anfangsdaten  $(s, y(s))$  eben gerade die Lösung auf  $[\tau, x]$  des Anfangswertproblems mit Anfangsdaten  $(\tau, \eta)$  ist, wenn  $\tau \leq s < x$ . (1iii) gilt aber auch ohne diese Einschränkung. (1ii) ergibt sich aus (1iii) mit Hilfe von (1i). Ersetze  $(x, s)$  durch  $(\tau, x)$ . Finde Evolutionsoperatoren  $\phi_{x,\tau}(\eta) := y(x, \tau, \eta)$  mit Bedeutung von (1i)-(1iii):

- (i')  $\phi_{\tau,\tau} = \text{id}_{\mathbb{K}^N}$  (auf Definitionsbereich  $\phi_{\tau,\tau}$ ).

(ii')  $\phi_{\tau,x} \circ \phi_{x,\tau} = \text{id}_{\mathbb{K}^N}$  (auf Definitionsbereich  $\phi_{x,\tau}$ ).

(iii')  $\phi_{x,s} \circ \phi_{s,\tau} = \phi_{x,\tau}$  (auf  $\phi_{s,\tau}^{-1}$  Def.  $\phi_{x,s}$ ).

Im autonomen Fall  $y' = f(y)$  mit einem lokal Lipschitz-stetigen Vektorfeld  $f : \mathbb{K}^N \supset D \rightarrow \mathbb{K}^N$  besitzt die charakteristische Funktion  $y(x, \tau, \eta)$  noch die zusätzliche Eigenschaft:

$$y(x + s, \tau, \eta) = y(x, \tau - s, \eta),$$

(wenn eine der beiden Seiten existiert), denn mit  $y(x)$  ist auch  $\tilde{y}(x) = y(x + s)$  für festes  $s \in \mathbb{R}$  Lösung und wenn  $y(\tau) = \eta$  ist, so gilt  $\tilde{y}(\tau - s) = \eta$ , das heißt  $\tilde{y}$  löst das Anfangswertproblem  $\tilde{y}' = f(\tilde{y})$ ,  $\tilde{y}(\tau - s) = \eta$ . Für die Evolutionsoperatoren bedeutet dies:

$$\phi_{x+s,\tau} = \phi_{x,\tau-s} = \phi_{x,0}.$$

Die Abbildung  $\phi_{x,0}$  hatten wir gerade als die lokale Flussabbildungen  $\phi_x$  des Vektorfeldes  $f$  bezeichnet. Sie erfüllen die Axiome eines lokalen Flusses.

2. (i'')  $\phi_0 = \text{id}_D$ .
- (ii'')  $\phi_{-x} = \phi_x^{-1}$  (insbesondere  $\text{Bild}(\phi_x) = \text{Def}(\phi_{-x})$ ).
- (iii'')  $\phi_x \circ \phi_{\bar{x}} = \phi_{x+\bar{x}}$  (auf  $\phi_x^{-1}(\text{Bild}\phi_{\bar{x}})$ ).

□

Zum Abschluss dieses Kapitels bemerken wir noch, dass die Abhängigkeiten der Lösungen von Differentialgleichungen  $y' = f(x, y, p)$ ,  $x(\tau) = \eta$  von Daten unten entsprechenden Voraussetzungen an  $f$  sogar differenzierbar sind.

**Satz 2.3.11 (Differenzierbarkeitssatz, ohne Beweis)** Sei  $D$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ ,  $P$  offen in einem normierten Raum  $F$ ,  $Q$  metrischer Raum,  $f : D \times P \times Q \ni (x, y, p, q) \mapsto f(x, y, p, q) \in \mathbb{K}^N$  stetig und  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Weiter sei  $y(x, \tau, \eta, p, q)$  die charakteristische Funktion zur Differentialgleichung  $y' = f(x, y, p, q)$ . Dann gilt:

1. Ist  $f$  bezüglich  $(y, p)$  (bei festem  $(x, q)$ )  $m$ -fach differenzierbar und sind die Ableitungen nach  $(y, p)$  bis zur Ordnung  $m$  stetig auf  $D \times P \times Q$ , so besitzt  $y(x, \tau, \eta, p, q)$  stetige Ableitungen bis zur Ordnung  $m$  nach  $(\eta, p)$  auf dem Definitionsbereich der charakteristischen Funktion.
2. Hat  $f$  bezüglich  $(x, y, p)$  (bei festem  $q$ ) zusätzlich stetige Ableitungen bis zur Ordnung  $(m - 1)$  auf  $D \times P \times Q$ , so ist  $y(x, \tau, \eta, p, q)$  sogar nach  $(x, \tau, \eta, p)$   $m$ -fach differenzierbar auf dem Definitionsbereich der charakteristischen Funktion.

□

## 2.4 Autonome Systeme

Unter einem autonomen Differentialgleichungssystem versteht man ein System der Form

$$y' = F(y), \quad (2.21)$$

wobei  $F : \mathbb{K}^N \supset D \rightarrow \mathbb{K}^N$  ein (lokal) Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf der offenen Menge  $D$  ist. Bezeichnet  $y(x, \tau, \eta)$  die charakteristische Funktion zu diesem System, so hatten wir die Abbildungen  $\phi_x : \eta \mapsto \phi_x(\eta) := y(x, 0, \eta)$  Flussabbildungen genannt. Die Familie von Abbildungen  $(\phi_x)_{x \in \mathbb{R}}$  (bzw. die Abbildung  $(x, \eta) \mapsto \phi_x(\eta)$ ) wird lokaler Fluss des Vektorfeldes  $F$  genannt. Der Definitionsbereich von  $\phi_x$  ist dann  $\{\eta \in D : x_-(\eta) < x < x_+(\eta)\}$  wobei  $(x_-(\eta), x_+(\eta))$  das Existenzintervall der maximalen Lösung des Anfangswertproblems  $y' = F(y)$ ,  $y(0) = \eta$  ist. Der Fluss  $(x, \eta) = \phi(x, \eta) = \phi_x(\eta)$  ist dann auf  $\Omega = \bigcup_{\eta \in D} (x_-(\eta), x_+(\eta)) \times \{\eta\}$  definiert.

Wir wissen bereits, dass die lokalen Flussabbildungen die Axiome eines lokalen Flusses erfüllen:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \text{id}_D \\ \phi_{-x} &= \phi_x^{-1} \\ \phi_x \circ \phi_{\bar{x}} &= \phi_{(x+\bar{x})} \end{aligned}$$

Ist  $F$   $m$ -fach stetig differenzierbar, so sind die Flussabbildungen von der Klasse  $C^m$  auf ihrem Definitionsbereich.

**Beispiel**  $y' = 1 + y^2$  auf  $\mathbb{R}$ . Dann ist  $\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{d\sigma}{1+\sigma^2} = x - x_0$  und  $\arctan(y(x)) - \arctan(y(x_0)) = x - x_0$ . Somit folgt

$$y(x, x_0, \eta) = \tan(x - x_0 + \underbrace{\arctan(y(x_0))}_{\eta}).$$

Die Lebensdauerfunktionen  $x_{\pm}(x_0, \eta)$  ergeben sich zu  $x_0 - \arctan \eta \pm \frac{\pi}{2}$  und das maximale Existenzintervall  $I_{\max}(x_0, \eta)$  ist

$$I_{\max}(x_0, \eta) = (x_0 - \arctan \eta - \frac{\pi}{2}, x_0 - \arctan \eta + \frac{\pi}{2}).$$

Der lokale Fluss ergibt sich mit  $x_0 = 0$ , also

$$\phi_x(\eta) = \tan(x + \arctan \eta), \quad \forall x \in (-\arctan \eta - \frac{\pi}{2}, -\arctan \eta + \frac{\pi}{2}),$$

$$\text{d.h. } x_{\pm}(\eta) = -\arctan \eta \pm \frac{\pi}{2}.$$

□



**Definition 2.4.1** (1) Für  $\eta \in D$  heißen die Bildmengen (der maximalen Lösung) des autonomen Systems (2.21) mit Anfangswert  $\eta \in D$

$$\begin{aligned} O(\eta) &:= \{\phi(x, \eta) : x_-(\eta) < x < x_+(\eta)\} = O(I_{\max}, \eta), \\ O^+(\eta) &:= \{\phi(x, \eta) : 0 \leq x \leq x_+(\eta)\}, \\ O^-(\eta) &:= \{\phi(x, \eta) : x_-(\eta) < x \leq 0\}, \end{aligned}$$

Orbit (oder Trajektorie) bzw. Bahn des autonomen Systems (2.21) durch  $\eta$  bzw. positiver / negativer Halborbit (Halbtrajektorie, Halbbahn) durch  $\eta$ . Die Menge aller Trajektorien wird Phasenportrait genannt.

- (2)  $\eta_0 \in D$  heißt Singulärer Punkt des Vektorfeldes  $F$ , wenn  $F(\eta_0) = 0$ . Ist  $\eta_0$  singulärer Punkt von  $F$ , so nennt man  $\eta_0$  auch Ruhelage bzw. Gleichgewichtslage des autonomen Systems.
- (3) Ein Punkt  $\eta^* \in D$  heißt  $\omega$ -Grenzpunkt von  $\eta$ , wenn eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $[0, \infty)$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{x_n}(\eta) = \eta^*$ . Ein Punkt  $\eta_* \in D$  heißt  $\alpha$ -Grenzpunkt von  $\eta$ , wenn es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(-\infty, 0]$  gibt, so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{x_n}(\eta) = \eta_*$  gelten. Die Menge aller  $\omega$ -Grenzpunkte /  $\alpha$ -Grenzpunkte von  $\eta$  wird mit  $\omega(\eta)$ ,  $\alpha(\eta)$  bezeichnet und  $\omega$ -Limes-bzw.  $\alpha$ -Limes-Menge genannt.

□

**Beispiel** Betrachte das ebene autonome System

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(x) + y(x)(1 - |y(x)|^2), \quad (2.22)$$

wobei  $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in \mathbb{R}^2$  ist. Indem man das Skalarprodukt von (2.22) mit  $y(x)$  bildet erhält man

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} |y(x)|^2 = |y(x)|^2 (1 - |y(x)|^2).$$

Dies ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion  $\rho(x) = |y(x)|^2$ , die man explizit lösen kann. Aus  $\rho'(x) = 2\rho(x)(1 - \rho(x))$  folgt nämlich

$$\frac{\rho'(x)}{2\rho(x)(1 - \rho(x))} = 1,$$

und durch Integration von 0 bis  $x$  folgt

$$\int_{\rho_0}^{\rho(x)} \frac{ds}{2s(1-s)} = x = \frac{1}{2} \int_{\rho_0}^{\rho(x)} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right) ds = \frac{1}{2} \log \frac{s}{1-s} \Big|_{\rho_0}^{\rho(x)},$$

wobei  $\rho_0 = \rho(0) = |y(0)|^2 = |\eta|^2$  ist.

$$\Rightarrow \frac{\rho}{1-\rho(x)} = \frac{\rho_0}{1-\rho_0} \exp(2x) \Leftrightarrow \rho(x) = \frac{\rho_0}{\rho_0 + (1-\rho_0) \exp(-2x)}.$$

Für  $|y(x)|$  folgt damit

$$|y(x)| = \frac{|\eta|}{\sqrt{|\eta|^2 + (1-|\eta|^2) \exp(-2x)}}.$$

Setze nun  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $J^2 = -\text{id}$  und  $Jy(x)y(x) = 0$ . Aus (2.22) ergibt sich damit  $y(x)Jy'(x) = \underbrace{y(x)J^2y(x)}_{-|y(x)|^2} + \underbrace{y(x)Jy(x)}_0(1-|y(x)|^2)$ . Also folgt  $y'_2y_1 - y'_1y_2 = -|y(x)|^2$ .

Ebene Polarkoordinaten

$$y(x) = |y(x)|(\cos \varphi(x), \sin \varphi(x)) = \sqrt{\rho(x)}(\cos \varphi(x), \sin \varphi(x))$$

eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dx} \sqrt{\rho(x)} \sin \varphi(x) + \sqrt{\rho(x)} \varphi'(x) \cos \varphi(x) \right) \sqrt{\rho(x)} \cos \varphi(x) - \\ & - \left( \frac{d}{dx} \sqrt{\rho(x)} \cos \varphi(x) - \sqrt{\rho(x)} \varphi'(x) \sin \varphi(x) \right) \sqrt{\rho(x)} \sin \varphi(x) = \\ & = \rho(x) \varphi'(x) = -\rho(x). \end{aligned}$$

Also  $\varphi'(x) = -1$  und  $\varphi(x) = \alpha - x$  wobei  $\alpha = \varphi(0) - \arg(\eta)$  ist. Damit ergibt sich die Allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{|\eta|}{\sqrt{|\eta|^2 + (1-|\eta|^2) \exp(-2x)}} (\cos(\alpha - x), \sin(\alpha - x)), \quad \eta = |\eta|e^{i\alpha}.$$

Indem man  $|\eta|$  und  $\alpha$  via  $(\eta_1, \eta_2) = \eta$  ausdrückt erhält man mit Hilfe von  $(\eta_1, \eta_2) \neq 0$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)e^{-2x}}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} \cos x + \frac{\eta_2}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} \sin x \\ \frac{\eta_2}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} \cos x - \frac{\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} \sin x \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Fluss durch

$$\phi(x, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\eta_1^2 + \eta_2^2} - 1\right)e^{-2x}}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} \cos x + \frac{\eta_2}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} \sin x \\ \frac{\eta_2}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} \cos x - \frac{\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} \sin x \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

für  $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 \neq 0$  gegeben. Aus dieser Darstellung entnimmt man, dass der Definitionsbereich des Flusses gerade die Menge

$$\Omega = \mathbb{R} \times \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : \eta_1^2 + \eta_2^2 \leq 1\} \cup \bigcup_{\eta_1^2 + \eta_2^2 > 1} \left(\frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{\eta_1^2 + \eta_2^2}\right), \infty\right) \times \{(\eta_1, \eta_2)\} \quad (2.24)$$

ist. Für  $\eta_1, \eta_2 \neq 0$  stellt der 2. Faktor in (2.24) eine Drehung im positiv durchlaufener Zeit in mathematisch negativer Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) dar. Außerdem liest man der Lösungsformel ab:

- Ist  $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$ , so ist der 1. Faktor gegen 0 bei  $x \rightarrow -\infty$  und gegen 1 für  $x \rightarrow +\infty$ , ohne jedoch 0 oder 1 zu werden.
- Ist  $0 < \eta_1^2 + \eta_2^2 < 1$ , so strebt der 1. Faktor gegen 0 bei  $x \rightarrow -\infty$  und gegen 1 für  $x \rightarrow +\infty$ , ohne jedoch 0 oder 1 zu werden.
- Ist  $\eta_1^2 + \eta_2^2 > 1$ , so strebt der 1. Faktor gegen  $\infty$  für  $x \rightarrow x_-(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{\eta_1^2 + \eta_2^2}\right)$ . Für  $x \rightarrow \infty$  strebt er gegen 1, ohne 1 zu werden.

Das heißt es ergeben sich 4 Typen von Orbits:

- Der einpunktige Orbit  $\{(0, 0)\}$  (Ruhelage des Systems).
- Spiralen in  $\{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \eta_1^2 + \eta_2^2 < 1\}$ .
- Die Einheitskreislinie  $\{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1\}$ .
- Spiralen in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : \eta_1^2 + \eta_2^2 \leq 1\}$ , die sich bei  $x \rightarrow \infty$  der Einheitskreislinie nähern und bei  $x \rightarrow x_-(\eta_1, \eta_2)$  unbeschränkt werden.

Der expliziten Lösungsformel entnimmt man außerdem:

- Der kritische Punkt 0 hat die  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmenge  $\{(0, 0)\}$ .
- Alle Punkte mit  $0 < |(\eta_1, \eta_2)| < 1$  besitzen die  $\alpha$ -Limesmenge  $\{(0, 0)\}$  und die  $\omega$ -Limesmenge  $\{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1\}$ .
- Alle Punkte auf der Einheitskreislinie  $S_1(0) = \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1\}$  besitzen die  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmenge  $S_1(0)$ .
- Alle Punkte mit  $|(\eta_1, \eta_2)| > 1$  haben die  $\omega$ -Limesmenge  $S_1(0)$ .

□

Der folgende Satz ist eine unmittelbare Konsequenz des Satzes über die maximale Lösung.

**Satz 2.4.2 (Randverhalten der Orbits)** Sei  $D \subset \mathbb{K}^N$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{K}^N$  Lipschitzstetig. Dann gilt für die Halborbis  $O^\pm(\eta)$  des autonomen Systems  $y' = F(y)$ .

(i) Ist  $O^-(\eta)$  bzw.  $O^+(\eta)$  in einer kompakten Teilmenge von  $D$  enthalten, so ist  $x_-(\eta) = -\infty, x_+(\eta) = +\infty$ .

(ii) Ist  $x_+(\eta) < \infty$ , so ist  $O^+(\eta)$  unbeschränkt oder es gilt  $\partial D \cap \overline{O^+(\eta)} \neq \emptyset$ . Genauer hat man

$$\min\{\text{dist}(\phi_x(\eta), \partial D), \frac{1}{1 + \|y(x)\|}\} \rightarrow 0, \quad \text{bei } x \rightarrow x_+(\eta).$$

(iii) Ist  $x_-(\eta) > -\infty$ , so ist  $O^-(\eta)$  unbeschränkt oder es gilt  $\partial D \cap \overline{O^-(\eta)} \neq \emptyset$ . Genauer hat man

$$\min\{\text{dist}(\phi_x(\eta), \partial D), \frac{1}{1 + \|y(x)\|}\} \rightarrow 0, \quad \text{bei } x \rightarrow x_-(\eta).$$

□

**Lemma 2.4.3** Je zwei Orbits eines autonomen Systems, die in einem Punkt übereinstimmen, sind gleich.

**Beweis** Sei  $\xi \in O(\eta_1) \cap O(\eta_2)$ , etwa  $\xi = \phi(s, \eta_1)$  mit  $s \in I_{\max}(\eta_1)$ . Dann gilt für  $x \in I_{\max}(\xi) = I_{\max}(\phi(s, \eta_1))$  einerseits  $s + x \in I_{\max}(\eta_1)$  und andererseits  $\phi(x, \xi) = \phi(x + s, \eta_1)$ , also  $O(\eta_1) \supset O(\xi)$ . Für die umgekehrte Inklusion bemerken wir, dass  $-s \in I_{\max}(\xi)$ , also auch

$$O(\xi) \ni \phi(-s, \xi) = \phi(-s, \phi(s, \eta_1)) = \phi(0, \eta_1) = \eta_1.$$

Daraus folgt  $O(\eta_1) \subset O(\xi)$ , das heißt  $O(\xi) = O(\eta_1)$  und entsprechend  $O(\xi) = O(\eta_2)$ .

□

**Definition 2.4.4**  $\eta \in D$  heißt periodischer Punkt mit (Minimal-)periode  $T > 0$ , wenn  $\phi(\tau, \eta) = \eta$  und  $\phi(x, \eta) \neq \eta$  für  $x \in (0, T)$  gilt. Ein Orbit  $O(\eta)$  heißt geschlossen (periodischer Orbit), wenn  $\eta$  ein periodischer Punkt ist.

□

**Bemerkung** (Singuläre Punkte)

Ist  $\eta \in D$  ein singulärer Punkt von  $F$ , so gilt  $\phi(x, \eta) = \eta$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Umgekehrt folgt aus  $\phi(x, \eta) = \eta$  für alle  $x$  (nahe 0 reicht)

$$0 = \frac{d}{dx}(x, \eta) = F(\phi(x, \eta)) = F(\eta).$$

Das heißt die kritischen Punkte von  $F$  sind genau die Gleichgewichtslage von  $\phi$ , also des zugehörigen Flusses.

□

**Satz 2.4.5 (Klassifikation der Orbits)** Sei  $D \subset \mathbb{K}^N$  offen und  $F : D \rightarrow \mathbb{K}^N$  Lipschitz-stetig,  $\eta \in D$ . Dann hat man für den Orbit  $O(\eta)$  folgende Möglichkeiten:

- (1)  $I_{max}(\eta) = (x_-(\eta), x_+(\eta)) = \mathbb{R}$  und  $O(\eta) = O^\pm(\eta) = \{\eta\}$ .
- (2)  $I_{max}(\eta) = \mathbb{R}$  und  $\phi(\cdot, \eta)$  ist nicht-konstant und periodisch, das heißt der Orbit  $O(\eta)$  ist ein periodischer Orbit mit  $O(\eta) = O^\pm(\eta) \neq \{\eta\}$ .
- (3)  $\phi_\eta(\cdot) = \phi(\cdot, \eta) : I_{max} \rightarrow D$  ist injektiv, das heißt der Orbit wird durch eine Doppelpunktfreie Kurve ohne Endpunkte parametrisiert.

**Beweis** Angenommen  $\phi(\cdot, \eta)$  ist nicht injektiv, so gibt es  $x_1 < x_2 \in I_{max}(\eta)$ , so dass  $\phi(x_1, \eta) = \phi(x_2, \eta)$ . Der Satz über Lösungen auf einem vorgegebenen Intervall zeigt, dass  $I_{max}(\eta) = \mathbb{R}$  sein muss. Die Flussaxiome zeigen außerdem mit  $T := x_2 - x_1 > 0$  mit

$$\begin{aligned} \phi(x + T, \eta) &= \phi(x + x_2 - x_1, \eta) = \phi(x - x_1, \phi(x_2, \eta)) \\ &= \phi(x - x_1, \phi(x_1, \eta)) = \phi(x - x_1 + x_1, \eta) = \phi(x, \eta), \end{aligned}$$

das heißt  $\phi(\cdot, \eta)$  ist periodisch mit Periode  $T > 0$ . Nun ist  $\phi(\cdot, \eta)$  entweder konstant und damit  $O(\eta) = \{\eta\}$  oder aber  $\phi(\cdot, \eta)$  ist periodisch und nicht konstant. Im zweiten Fall sei  $T^* > 0$  die Minimalperiode von  $\phi(\cdot, \eta)$ . Dann hat man

$$O^+(\eta) \subset O(\eta) = \phi(\mathbb{R}, \eta) = \phi([0, T^*], \eta) \subset O^+(\eta),$$

also  $O^+(\eta) = O(\eta)$  und ebenso  $O^-(\eta)$ .

□

Im Fall  $D = \mathbb{R}^2$  kann man die Bestimmung der Orbits eines autonomen Systems  $y' = F(y)$  auf das Lösen einer skalaren Differentialgleichung zurückführen. Allerdings muss man dabei einen Informationsverlust in Kauf nehmen, denn die Abhängigkeit der Parametrisierung der Orbits von  $x$  bleibt bei dieser Methode unberücksichtigt.

**Satz 2.4.6 (Geometrie der Orbits)** Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $F = (F_1, F_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  Lipschitz-stetig. Dann gilt für das zugehörige autonome System  $y' = F(y)$ , das heißt  $(y'_1, y'_2) = (F_1(y_1, y_2), F_2(y_1, y_2))$  sowie  $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in D$ :

- (1) Ist  $F_1(y) \neq 0$  für alle  $y \in D$ , stimmt der Orbit überein mit den Graphen der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{du}{dv} = \frac{F_2(v, u)}{F_1(v, u)}, \quad u(\eta_1) = \eta_2, \quad u = u(v). \quad (2.25)$$

- (2) Ist  $F_2(y) \neq 0$ , so stimmt der Orbit  $O(\eta)$  überein mit dem Graphen der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dv}{du} = \frac{F_1(v, u)}{F_2(v, u)}, \quad v(\eta_1) = \eta_2, \quad v = v(u). \quad (2.26)$$

**Beweis** Sei  $I_{max} = I_{max}(\eta)$  und  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = \Phi(\cdot, \eta) : I_{max} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die maximale Lösung von  $y' = F(y)$ ,  $y(0) = \eta$ . In Komponenten gilt dann  $\varphi'_1 = F_1(\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $\varphi'_2 = F_2(\varphi_1, \varphi_2)$  mit  $\varphi_1(0) = \eta_1$ ,  $\varphi_2(0) = \eta_2$ . Betrachte Fall (2.25), (2.26) geht analog. Nach Voraussetzung gilt  $\varphi'_1(x) = F_1(\varphi(x)) \neq 0$  für alle  $x \in I_{max}$ . Nach dem Zwischenwertsatz ist  $\varphi_1$  dann streng monoton. Somit besitzt  $\varphi_1$  eine auf  $\varphi_1(I_{max})$  definierte Umkehrfunktion  $\varphi_1^{-1} : \varphi_1(I_{max}) \rightarrow I_{max}$ , für die  $\varphi_1^{-1}(\eta_1) = 0$ . Für den Orbit  $O(\eta)$  hat man

$$\begin{aligned} O(\eta) &= \{(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) : x \in I_{max}\} \\ &= \{(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(v)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(v))) : v \in \varphi_1(I_{max})\} \\ &= \{(v, \varphi_2(\varphi_1^{-1}(v))) : v \in \varphi_1(I_{max})\}. \end{aligned}$$

Damit bleibt zu zeigen, dass  $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(I_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems aus (2.25) ist. Differentiation liefert:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dv}(v) &= \frac{\varphi'_2(\varphi_1^{-1}(v))}{\varphi'_1(\varphi_1^{-1}(v))} = \frac{F_2(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(v)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(v)))}{F_1(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(v)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(v)))} \\ &= \frac{F_2(v, \psi(v))}{F_1(v, \psi(v))}, \quad \forall v \in \varphi_1(I_{max}), \end{aligned}$$

das heißt  $\psi$  ist Lösung des Anfangswertproblems. Zu zeigen verbleibt die Maximalität von  $\psi$ . Angenommen  $\psi$  ist nicht maximal, berechne  $\tilde{\psi}$  die maximale Fortsetzung von  $\psi$ . Diese sei zum Beispiel im rechten Randpunkt von  $\varphi_1(I_{max})$  definiert. Ohne Einschränkung sei  $\varphi_1$  streng monoton wachsend (andere Fälle analog). Dann gilt

$$O^+(\eta) = \Gamma(\psi|_{[\eta_1, v_r]}) \subset \Gamma(\tilde{\psi}|_{[\eta_1, v_r]}) \subset D,$$

das heißt  $O^+(\eta)$  ist in einer kompakten Teilmenge von  $D$  enthalten.  $\Rightarrow x_+(\eta) = \infty$ . Da  $\varphi_1$  streng monoton wachsend ist, folgt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1(x) = v_r$ . Sei  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\varphi_1(x) > v_r - 1$  für alle  $x \geq N$ . Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass

$$0 < \varphi'(x_n) = \frac{\varphi_1(2n) - \varphi_1(n)}{n} < \frac{1}{n},$$

für alle  $x_n \in [2, 2n]$ . Lasse nun  $n \rightarrow \infty$  streben. Somit folgt

$$0 < F_1(v_r, F(v_r)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_1(\varphi_1(x_n), \varphi_2(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_1'(x_n) = 0.$$

Dies ergibt den gewünschten Widerspruch - somit folgt, dass  $\psi$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems (2.25) ist. □

**Bemerkung** Die im letzten Satz gemachten Voraussetzungen  $0 \notin F_1(D)$  bzw.  $0 \notin F_2(D)$  sind meist nicht erfüllt. Die Vorgehensweise in diesem Fall ist:

(2.25) benutzt man auf den (offenen) Zusammenhangskomponenten von  $F_1^{-1}(0, \infty)$  und  $F_1^{-1}(-\infty, 0)$ , wogegen (2.26) auf den Zusammenhangskomponenten von  $F_2^{-1}(0, \infty)$  und  $F_2^{-1}(-\infty, 0)$  angewendet wird. Da sich die so erhaltenen Gebiete überlappen, kann man durch Zusammensetzen der entsprechenden Orbits alle nicht-kritischen Orbits konstruieren. □

**Beispiel** (Das mathematische Pendel) Die ungedämpfte Schwingung eines idealen Pendels in der Ebene (Massepunkte der Masse  $m$  an einem masselosen Stab der Länge  $l$ ) wird beschrieben durch die Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$y'' = -\frac{g}{l} \sin y. \quad (2.27)$$

Dabei steht  $g$  für die Erdbeschleunigung und  $y$  für den Auslenkwinkel aus der Ruhelage. Setzt man  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , so erhält man

$$y'' + \omega^2 \sin y = 0, \quad y(x) = y.$$

In der Physik ersetzt man für kleine Auslenkungen des Pendels  $\sin y \approx y$  und reduziert das Problem so auf eine skalare lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit den Koeffizienten  $y'' + \omega^2 y = 0$  mit charakteristischem Polynom

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Zugehöriges System 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

besitzt dasselbe charakteristische Polynom, denn  $\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2$ .

Es gilt:

$$\exp \left( x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega x) \\ -\omega \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für die Allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos(\omega x) + \frac{B}{\omega} \sin(\omega x) \\ -A\omega \sin(\omega x) + B \cos(\omega x) \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Dies ist eine lineare Pendelgleichung und wird durch  $y(x) = A \cos(\omega x) + \frac{B}{\omega} \sin(\omega x)$  gelöst, wobei sich  $A, B$  aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Genau ist  $y(0) = A$ ,  $y'(0) = B$ . Wegen

$$y_1(x)^2 + \frac{y_2(x)^2}{\omega^2} = A^2 + \frac{B^2}{\omega^2},$$

lassen sich die Bahnkurven  $(y_1(x), y_2(x))$  als Ellipsen im Phasenraum parametrisieren.

Im folgenden Wollen wir die Orbits der ursprünglichen Differentialgleichung mit Hilfe des letzten Satzes bestimmen. Das zu  $y'' = -\omega^2 \sin y$  assoziierte System 1. Ordnung ist

$$y' = y_1' = y_2 = F_1(y_1, y_2), \quad y_2' = -\omega^2 \sin y_1 = F_2(y_1, y_2),$$

wobei  $(y_1, y_2) = (y_1(x), y_2(x))$  ist. Die Mengen  $F_1^{-1}(0, \infty) = \mathbb{R} \times (0, \infty)$  und  $F_1^{-1}(-\infty, 0)$  sind offenbar Gebiete. Mit (2.25) des vorherigen Satzes stellen wir die zugehörige Differentialgleichung auf.

$$\begin{aligned} u = u(v), \quad \frac{du}{dv} &= \frac{F_2(v, u)}{F_1(v, u)} = \frac{-\omega^2 \sin v}{u} \Leftrightarrow \omega^2 \sin v + u \frac{du}{dv} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dv} \left( \frac{1}{2} u^2 - \omega^2 \cos v \right) &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} u^2(v) - \omega^2 \cos v = \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

wobei  $\frac{c}{2} \geq -\omega^2$  sein muss, also  $c + 2\omega^2 \geq 0$ . Auflösen nach  $u(v)$  ergibt als Orbitstücke in der oberen bzw. unteren Halbebene die Graphen der Funktionen  $u(v) = \pm \sqrt{c + 2\omega^2 \cos v}$  auf gegebenen Definitionsbereichen (abhängig von  $c$ ).



Die Zusammenhangskomponenten von  $F_2^{-1}(0, \infty)$  sind die vertikalen Streifen  $((2k-1)\pi, 2k\pi) \times \mathbb{R}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ , die von  $F_2^{-1}(-\infty, 0)$  die Streifen  $(2k\pi, (2k+1)\pi) \times \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Die assoziierte Differentialgleichung ist jetzt

$$\frac{dv}{du} = \frac{u}{-\omega^2 \sin v} \Leftrightarrow u + \omega^2 \sin v \frac{dv}{du} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{du} \left( \frac{1}{2} v^2 - \omega^2 \cos u \right) = 0,$$

mit  $v = v(u)$ . Auflösen nach  $v$  ergibt also die Orbitstücke der Differentialgleichung (in den verschiedenen Eindeutigkeitsbereichen der arccos-Funktion).

$$v(u) = \arccos\left(\frac{1}{2\omega^2}(u^2 - c)\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Zu den Durchschnitten der in (2.25) und (2.26) betrachteten Gebiete (hier sind sowohl  $F_1$ , als auch  $F_2$  ungleich Null), sind die in (2.25) und (2.26) gefundenen Lösungsfunktionen gerade invers zueinander (immer zum selben  $c$ ) - beachte die Identifikation  $u = y_2, v = y_1$  - wir erhalten 4 verschiedene Orbittypen:

- (1) Die kritischen Punkte sind  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (2) Für  $c > 2\omega^2$  sind die Orbits Graphen der Funktionen  $y_2(y_1) = \pm \sqrt{c + 2\omega^2 \cos y_1}$ , die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind, das heißt die Orbits sind injektiv und nicht periodisch.
- (3) Für  $c = 2\omega^2$  sind die Orbits gerade die Graphen von  $y_2(y_1) = \pm \sqrt{2\omega^2 + 2\omega^2 \cos y_1}$  über den Intervallen  $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ . Bei  $y_1 \rightarrow (2k-1)\pi$ , bzw.  $y_1 \rightarrow (2k+1)\pi$  streben diese gegen den kritischen Punkt  $((2k+1)\pi, 0)$ . Sie sind ebenfalls injektiv und nicht periodisch.
- (4) Für  $-2\omega^2 < c < 2\omega^2$  sind die Orbits periodisch. Für  $k \in \mathbb{Z}$  sind sie zusammengesetzt aus den vier sich überschneidenden Graphen der Funktionen:

$$\begin{aligned} y_{2\pm} & : \left( 2k\pi - \arccos\left(-\frac{c}{2\omega^2}\right), 2k\pi + \arccos\left(-\frac{c}{2\omega^2}\right) \right) \rightarrow \mathbb{R}, \\ y_{2\pm}(y_1) & = \sqrt{c + 2\omega^2 \cos y_1}, \\ y_{1\pm} & : \left( -\sqrt{c + 2\omega^2}, \sqrt{c + 2\omega^2} \right) \rightarrow \mathbb{R}, \\ y_{1\pm}(y_2) & = 2k\pi \pm \arccos\left(\frac{1}{2\omega^2}(y_2^2 - c)\right). \end{aligned}$$

Der arccos entspricht dem Hauptzweig desselben mit Werten in  $(0, \pi)$ . Schließlich kann man die Orientierung (also den Durchlaufsin) noch aus der ersten Gleichung  $y_1' = y_2$  ablesen. Für  $y_2 > 0$  verlaufen die Orbits in positiver  $y_1$ -Richtung, für  $y_2 < 0$  dagegen in negativer  $y_1$ -Richtung.

□

Im folgenden betrachten wir nochmals die im letzten Satz (unter den dortigen Voraussetzungen) hergeleiteten (impliziten) Differentialgleichungen:

$$\frac{du}{dv} = \frac{F_2(v, u)}{F_1(v, u)}, \quad \frac{dv}{du} = \frac{F_1(v, u)}{F_2(v, u)}$$

mit  $v = v(u)$ , bzw.  $u = u(v)$ . Diese Gleichungen sind äquivalent zu

$$F_1(v, u) \frac{du}{dv} - F_2(v, u) = 0, \quad F_2(v, u) \frac{dv}{du} - F_1(v, u) = 0.$$

Ziel ist es, solche ebenen autonomen Differentialgleichungen zu studieren, bei denen die assoziierten Differentialgleichungen für die Orbits exakt sind.

**Definition 2.4.7** Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  Lipschitz-stetig. Dann heißt das autonome System  $y' = F(y)$  (ebenes) Hamiltonsches-System, wenn es eine  $C^1$ -Funktion  $H : D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial y_1}(y_1, y_2) = -F_2(y_1, y_2), \quad \frac{\partial H}{\partial y_2}(y_1, y_2) = F_1(y_1, y_2), \quad \forall (y_1, y_2) \in D. \quad (2.28)$$

$H$  heißt Hamilton-Funktion.

□

**Satz 2.4.8 (Ebenes Hamiltonsches-System)** Unter der zuvor gemachten Voraussetzung sei  $y' = F(y)$  ein Hamilton-System und  $H : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine zugehörige Hamilton-Funktion. Dann ist  $H$  längs jeden Orbits konstant, das heißt es gilt

$$H(\phi(x, \eta)) = H(\eta), \quad \forall \eta \in D, \quad x \in I_{\max}(\eta).$$

**Beweis** Sei  $\eta \in D$  und  $\varphi := \phi(\cdot, \eta)$ , also  $\varphi'(x) = F(\varphi(x))$  für  $x \in I_{\max}(\eta)$ . Differentiation von  $H \circ \varphi$  zeigt dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H \circ \varphi(x) &= \frac{\partial H}{\partial y_1}(\varphi(x)) \varphi_1'(x) + \frac{\partial H}{\partial y_2}(\varphi(x)) \varphi_2'(x) \\ &= \frac{\partial H}{\partial y_1}(\varphi(x)) F_1(\varphi(x)) + \frac{\partial H}{\partial y_2}(\varphi(x)) F_2(\varphi(x)) \\ &= -F_2(\varphi(x)) F_1(\varphi(x)) + F_1(\varphi(x)) F_2(\varphi(x)) = 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $H \circ \varphi = \text{const.}$  auf  $I_{\max}(\eta)$ . Wegen  $H \circ \varphi(0) = H(\eta)$  folgt die Behauptung.

□

Hamiltonsche-Systeme sind für die Orbits die direkte Entsprechung exakter Differentialgleichungen, denn ist  $H$  die Hamilton-Funktion des autonomen Systems  $y' = F(y)$ , so sind die Differentialgleichungen für  $y_1(y_2)$  und  $y_2(y_1)$  exakt und haben beide  $H$  als Stammfunktion, denn:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy_1}H(y_1, y_2(y_1)) &= \frac{\partial H}{\partial y_1}(y_1, y_2(y_1)) + \frac{\partial H}{\partial y_2}(y_1, y_2(y_1))y_2' \\ &= -F_2(y_1, y_2(y_1)) + F_1(y_1, y_2(y_1))\frac{dy_2}{dy_1},\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy_2}H(y_1(y_2), y_2) &= \frac{\partial H}{\partial y_1}(y_1(y_2), y_2)y_1' + \frac{\partial H}{\partial y_2}(y_1(y_2), y_2) \\ &= -F_2(y_1(y_2), y_2)\frac{dy_1}{dy_2} + F_1(y_1(y_2), y_2).\end{aligned}$$

Die Orbits sind daher Teilmengen der Niveaulinien von  $H$ . In nicht-kritischen Punkten  $\eta \in G$  lässt sich die implizite Gleichung  $H(y_1, y_2) = H(\eta)$  mit dem Satz über implizite Funktionen lokal nach mindestens einer Variablen  $y_1$  oder  $y_2$  auflösen, so dass sich der Verlauf der Orbits jedenfalls lokal bestimmen lässt.

**Bemerkung** Bestimmung der Orbits von Hamilton-Systemen: Zunächst testet man, ob ein Hamiltonsches-System vorliegt, das heißt ob die Differentialgleichung

$$-F_2(y_1, y_2) + F_1(y_1, y_2)y_2' = 0$$

exakt ist. Auf sternförmigen Gebieten  $D \subset \mathbb{R}^2$  ist die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) = -\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(y_1, y_2)$$

dafür notwendig und hinreichend. Die Hamilton-Funktion bestimmt man durch Integration längs eines (beliebigen) Weges von  $(y_{1,0}, y_{2,0}) \in D$  nach  $(y_1, y_2) \in D$  über

$$H(y_1, y_2) = \text{const.} + \int_{C_{y_1, y_{1,0}}} \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} dy_1.$$

Ist  $H$  bestimmt, so setzt sich für  $\eta \in D$  die Niveaumenge  $\{(y_1, y_2) \in D, H(y_1, y_2) = H(\eta)\} = N_\eta$  aus Orbits von Lösungen zusammen. Insbesondere enthält sie den Orbit  $O(\eta)$  durch  $\eta$ .

□

Beispiele in den Übungen.

Zum Abschluss des Kapitels studieren wir noch die linearen ebenen autonomen Systeme

$$y' = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

**Zunächst bemerken wir** Konjugiert man  $A$  mit Hilfe einer regulären Matrix  $T$  auf die Form  $T^{-1}AT$ , so bleiben die Eigenwerte unverändert und  $w := T^{-1}y$  löst das autonome System  $w' = T^{-1}y' = T^{-1}Ay = T^{-1}ATw$ . Dies zeigt, dass man bei der Analyse des Systems  $y' = Ay$  sich auf die Betrachtung jeweils eines Repräsentanten aus jeder Ähnlichkeitsklasse von reellen  $2 \times 2$ -Matrizen beschreiben kann. Diese wählen wir in reeller Jordan'scher Normalform. Dabei ergeben sich 4 Fälle:

- (1) Besitzt  $A$  zwei verschiedene reelle Eigenwerte  $\rho, \sigma$  so ist  $A$  ähnlich zu  $B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ .
- (2) Besitzt  $A$  einen doppelten reellen Eigenwert  $\rho$  mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren, so ist  $A$  ähnlich zu  $B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ .
- (3) Besitzt  $A$  einen doppelten reellen Eigenwert  $\rho$  mit nur einem linear unabhängigen Eigenvektor, so ist  $A$  ähnlich zu  $B = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ .
- (4) Besitzt  $A$  einen konjugiert komplexes Eigenwertpaar  $\rho \pm i\sigma$ ,  $\sigma \neq 0$  so ist  $A$  ähnlich zu  $B = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ -\sigma & \rho \end{pmatrix}$ .

Wir diskutieren jeden dieser 4 Fälle in der Normalform  $w' = Bw$ . Dabei müssen wir noch unterscheiden ob  $B$  regulär oder singular ist.

**Fall I**  $B$  ist regulär, dann ist  $(0, 0)$  der einzige kritische Punkt.

**Fall I.1**  $B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ . In diesem Fall ist  $\phi(x, \xi, \eta) = (\xi \exp(\rho x), \eta \exp(\sigma x))$  der zugehörige Fluss und  $O(\xi, \eta) = \{(\xi \exp(\rho x), \eta \exp(\sigma x)) : x \in \mathbb{R}\}$  sind die assoziierten Orbits. Neben der Ruhelage  $(0, 0)$  erkennt man sofort, dass die 4 offenen Halbachsen Trajektorien sind. Dies entspricht  $\xi = 0, \eta \neq 0$  oder  $\xi \neq 0, \eta = 0$ . Für die restlichen Punkte  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  mit  $\xi \neq 0, \eta \neq 0$  hat man (leichte Umformung):

$$O(\xi, \eta) = \left\{ \left( y_1, \eta \left( \frac{y_1}{\xi} \right)^{\frac{\sigma}{\rho}} \right) : \frac{y_1}{\xi} > 0 \right\}.$$

Die Unterscheidung der Vorzeichenvarianten von  $\rho$  und  $\sigma$ , ohne Einschränkung sei  $\rho < 0$  (ansonsten vertausche  $y_1$  und  $y_2$ ) führt zu folgenden Unterfällen:

- (a)  $\rho < \sigma < 0$ : stabiler (zwei-tangentiger) Knoten in  $(0, 0)$ .
- (b)  $\rho < 0 < \sigma$ : Sattelpunkt.
- (c)  $0 < \rho < \sigma$ : instabiler (zwei-tangentiger) Knoten in  $(0, 0)$ .

**Fall I.2**  $B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$  mit  $\rho \in \mathbb{R} \neq 0$ . In diesem Fall ist  $\phi(x, \xi, \eta) = (\xi \exp(\rho x), \eta \exp(\rho x))$  und  $O(\xi, \eta) = \{(\xi \exp(\rho x), \eta \exp(\rho x)) : x \in \mathbb{R}\}$ . Wiederrum sind die 4 offenen Halbachsen Orbits. Für die restlichen Punkte  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  mit  $\xi \neq 0, \eta \neq 0$  hat man  $O(\xi, \eta) = \{(y_1, \frac{\eta}{\xi} y_1) : \frac{y_1}{\xi} > 0\}$ . Vorzeichenunterscheidung von  $\rho$  führt zu folgenden Unterfällen:

- (a)  $\rho < 0$ : stabiler (vieltangentiger) Knoten in  $(0, 0)$ .
- (b)  $\rho > 0$ : instabiler (vieltangentiger) Knoten in  $(0, 0)$ .

**Fall I.3**  $B = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$  mit  $\rho \in \mathbb{R} \neq 0$ . Für den Fluss und die Orbits gilt nun:

$$\begin{aligned} \phi(x, \xi, \eta) &= (\xi \exp(\rho x) + \eta x \exp(\rho x), \eta \exp(\rho x)), \\ O(\xi, \eta) &= \{(\xi \exp(\rho x) + \eta x \exp(\rho x), \eta \exp(\rho x)) : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Setzt man  $\eta = 0$ , so sieht man, dass neben der Ruhelage  $(0, 0)$  die beiden offenen Halbachsen  $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$  und  $\mathbb{R}_- \times \{0\}$  Orbits sind. Für  $\eta \neq 0$  erhält man nach Umformung

$$O(\xi, \eta) = \left\{ \left( \frac{\xi}{\eta} y_2 + \frac{y_2}{\rho} \log \frac{y_2}{\eta}, y_2 \right) : \frac{y_2}{\eta} > 0 \right\}.$$

Die Unterscheidung der Vorzeichenmöglichkeiten von  $\rho$  führt zu folgenden Unterfällen:

- (a)  $\rho < 0$ : stabiler (ein-tangentiger) Knoten.
- (b)  $\rho > 0$ : instabiler (ein-tangentiger) Knoten.

**Fall I.4**  $B = \begin{pmatrix} \varrho & \sigma \\ -\sigma & \varrho \end{pmatrix}$  mit  $\varrho, \sigma \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \neq 0$ . Für den Fluss und die Orbits gilt dann

$$\phi(x, \xi, \eta) = e^{\varrho x}(\xi \cos \sigma x, \eta \cos \sigma x - \xi \sin \sigma x), \quad O(\xi, \eta) = \{\phi(x, \xi, \eta), x \in \mathbb{R}\}$$

Die Unterscheidung der Vorzeichen von  $\varrho$  und  $\sigma$  führt zu folgenden Unterfällen:

- (a)  $\varrho < 0$ : Stabiler Strudel mit positiven / negativen Spiralen
- (b)  $\varrho = 0$ : Zentrum (oder Wirbel)
- (c)  $\varrho > 0$ : Instabiler Strudel

**Fall II**  $B$  ist singulär.

**Fall II.1**  $B = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  mit  $\varrho \in \mathbb{R} \neq 0$ . Dann ist  $\phi(x, \xi, \eta) = (\xi \exp(\varrho x), \eta)$  und die gesamte  $y_2$ -Achse besteht aus Ruhelagen.

- (a)  $\varrho < 0$ :
- (b)  $\varrho > 0$ :

**Fall II.2**  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Der gesamte Phasenraum besteht aus Ruhelagen.

**Fall II.3**  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Hier ist  $\phi(x, \xi, \eta) = (\xi + \eta x, \eta)$ . Die  $y_1$ -Achse besteht aus Ruhelagen.

## Beispiele

(1) Wir skizzieren das Phasenportrait zum autonomen System

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Die Eigenwerte des Systems berechnen sich über  $\det(A - \lambda \mathbb{E}) = \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$ . Der Eigenvektor zu  $\lambda_1$  ist  $v_1 = (1, 2)$  und zum Eigenwert  $\lambda_2$

ist  $v_2 = (1, -2)$ . Somit ist  $A$  ähnlich zur Diagonalmatrix  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  und es gilt:

$$B = T^{-1}AT, \quad \text{mit } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ist  $w$  Lösung des Systems in Normalform  $w' = Bw$  so ist  $y = Tw$  Lösung des ursprünglichen Systems (2.29). Das Phasenportrait zum System (2.29) ergibt sich daher direkt durch Transformation des Phasenportraits zum System in Normalform.

(2) Wir erstellen das Phasenportrait zum System

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = |y_1|.$$

- Für  $y_1 > 0$  liegt das lineare System  $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$  vor. Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist ähnlich zur Matrix  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  denn die Eigenwerte von  $A$  sind  $\lambda_{1/2} = \pm 1$ , die zugehörigen Eigenvektoren  $v_1 = (1, 1)$  und  $v_2 = (-1, 1)$ . Somit ergeben sich in der rechten Halbebene ( $y_1 > 0$ ) Hyperbeln als Trajektorien, deren Asymptoten durch die Richtungsvektoren  $(1, 1)$  und  $(1, -1)$  bestimmt sind.
- Für  $y_1 < 0$  liegt das System  $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$  vor, welches bereits in Normalform ist. Die Eigenwerte  $\lambda_{1/2} = \pm i$  zeigen, dass die Trajektorien in der linken Halbebene Kreislinien beschreiben.

(3) Wir betrachten die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y - y^2.$$

Diese ist äquivalent zum nichtlinearen autonomen System erster Ordnung ( $y_1 \equiv y, y_2 \equiv y'$ ):

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 - y_1^2 \end{pmatrix} = f(y_1, y_2)$$

Nullsetzen der rechten Seite zeigt zwei Ruhelagen des Systems, in den Punkten  $(0, 0)$  und  $(1, 0)$ . Betrachte zunächst die Linearisierung in der Ruhelage  $(0, 0)$ :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Fall (a) des vorherigen Beispiels zeigte, dass die Trajektorien zu (2.30) Hyperbeln mit Asymptoten, die durch die Richtungsvektoren  $v_1 = (1, 1)$ ,  $v_2 = (1, -1)$  definiert sind, darstellen. Die Linearisierung der Ruhelage  $(1, 0)$  erhalten wir zum Beispiel indem wir die Jacobische der rechten Seite berechnen:

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich das um  $(1, 0)$  linearisierte System zu

$$\begin{pmatrix} (y_1 - 1)' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Fall (b) des vorherigen Beispiels zeigte, dass die zugehörigen Trajektorien Kreise mit Mittelpunkt in der Ruhelage  $(1, 0)$  sind (Drehrichtung im Uhrzeigersinn). Blicken wir zurück auf das ursprüngliche, nichtlineare System, so sehen wir, dass die Energie

$$E(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 + V(y_1), \quad V(y_1) = -\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{3}y_1^3,$$

eine Erhaltungsgröße des Systems ist, denn:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}E(y_1, y_2) &= y_2y_2' + \frac{dV}{dy_1}y_1' = y_2y_2' - y_1y_1' + y_1^2y_1' \\ &= y_2y_2' + y_1'(y_1^2 - y_1) = y_2y_2' - y_2y_2' = 0 \end{aligned}$$

Das Potential  $V(y_1)$  ergibt somit direkt Aufschluss über das Phasenportrait: Ruhelagen des Systems befinden sich in den Extrema der Funktion  $V(y_1)$ . Jede Lösungsbahn in der  $(y, y')$ -Ebene (bzw.  $(y_1, y_2)$ -Ebene) verläuft in einer Niveaumenge  $E^{-1}(\{c\})$  von  $E$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ . Jede Zusammenhangskomponente einer Niveaumenge ist eine Lösungsbahn, mit Ausnahme von  $E^{-1}(\{0\})$ , was aus der instationären Lösungsbahn und der stationären, einpunktigen Trajektorie  $(0, 0)$  besteht.



## 2.5 Rand-und Eigenwertprobleme

Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf Differentialgleichungen 2. Ordnung. Speziell interessieren wir uns für Randwertprobleme für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung (nicht notwendig mit Konstanten Koeffizienten). Darunter verstehen wir eine Differentialgleichung 2. Ordnung auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$ , wobei wir die Randwerte  $y(a)$  und  $y(b)$  vorschreiben. Genauer betrachten wir auf  $[a, b]$  die Differentialgleichung

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (2.32)$$

mit stetigen Funktionen  $a_0, a_1, a_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und der zusätzlichen Voraussetzung  $a_2(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Daher können wir (2.32) zu einer expliziten Gleichung auflösen:

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = 0. \quad (2.33)$$

Nach dem Satz über die maximale Lösung wissen wir, dass die Lösungen dieser Gleichung auf dem ganzen Intervall  $[a, b]$  existieren und daher nicht zwischendurch „explodieren“ können. Natürliche Randbedingungen, die besonders oft auftreten, sind etwa von der Form  $y(a) = y(b) = 0$  oder  $y'(a) = y'(b) = 0$ . Beides wird verallgemeinert zu sogenannten homogenen Randbedingungen der Form

$$\left. \begin{aligned} \alpha y(a) + \tilde{\alpha} y'(a) &= 0 \\ \beta y(b) + \tilde{\beta} y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

mit  $(\alpha, \tilde{\alpha}) \neq 0$  und  $(\beta, \tilde{\beta}) \neq 0$ .

**Definition 2.5.1** Die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = 0,$$

mit der homogenen Randbedingung (2.34) heißt homogene Randwertaufgabe.

□

Wir wollen hier die Werkzeuge der linearen Algebra ausnutzen und führen deshalb eine etwas formale Notation ein. Definieren wir die eindimensionalen Vektorräume

$$V_a := \{(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2 : \alpha y_0 + \tilde{\alpha} y_1 = 0\}, \quad V_b := \{(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2 : \beta y_0 + \tilde{\beta} y_1 = 0\},$$

so können wir (2.34) schreiben als

$$\begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} \in V_a, \quad \begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} \in V_b.$$

Wir wissen bereits, dass die Lösungsmenge  $L_H$  der Gleichung ein Vektorraum mit Dimension 2 ist und dass die Lösungen linear von den Anfangswerten  $y(x_0), y'(x_0)$  abhängen, für jedes  $x_0 \in [a, b]$ . Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Abbildung

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{für jedes } x_0 \in [a, b]$$

ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen  $L_H$  und  $\mathbb{R}^2$  ist.

Deshalb ist die Transportabbildung  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die jedem Paar  $\begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$  von Anfangswerten das zugehörigen Paar  $\begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix}$  von Endwerten (der durch die Anfangsdaten eindeutig gegebenen Lösung) zuordnet, ein linearer Isomorphismus  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Damit es überhaupt nichttriviale Lösungen der Randwertaufgabe gibt, müssen also die Bedingungen bei  $a$  und  $b$  zusammenpassen, in dem Sinn, dass  $\tau V_a = V_b$  gilt.

**Satz 2.5.2 (Homogene Randwertaufgabe)** *Die homogene Randwertaufgabe*

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

mit  $\alpha y(a) + \tilde{\alpha} y'(a) = 0$  und  $\beta y(b) + \tilde{\beta} y'(b) = 0$  auf  $[a, b]$  mit obigen Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen hat entweder nur die triviale Lösung  $y \equiv 0$ , oder es gibt einen eindimensionalen Unterraum von  $L_H$  als Lösungsmenge. In diesem Fall ist jede Lösung des (unvollständigen) Anfangswertproblems (2.32)  $\alpha y(a) + \tilde{\alpha} y'(a) = 0$  bereits eine Lösung des homogenen Randwertproblems.

□

Interessant ist die Frage, in welchem Fall man sich befindet. Dazu benötigen wir ein Fundamentalsystem  $(f_1, f_2)$  der Gleichung. Dann ist  $c_1 f_1 + c_2 f_2$  eine Lösung der homogenen Randwertaufgabe, wenn die Konstanten  $c_1, c_2$  das folgende Lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} (\alpha f_1(a) + \tilde{\alpha} f_1'(a))c_1 + (\alpha f_2(a) + \tilde{\alpha} f_2'(a))c_2 &= 0, \\ (\beta f_1(b) + \tilde{\beta} f_1'(b))c_1 + (\beta f_2(b) + \tilde{\beta} f_2'(b))c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Differentialgleichungssystem hat genau dann eine Lösung ungleich  $(0, 0)$ , wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha f_1(a) + \tilde{\alpha} f_1'(a) & \alpha f_2(a) + \tilde{\alpha} f_2'(a) \\ \beta f_1(b) + \tilde{\beta} f_1'(b) & \beta f_2(b) + \tilde{\beta} f_2'(b) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

**Beispiel** Stehende Wellen in einem einseitig geschlossenen Rohr können (bei äußerer Anregung) nur mit bestimmten Frequenzen entstehen, die von der Länge  $l$  des Rohres abhängen.  $y(x)$  sei die maximale Amplitude am Ort  $x \in [0, l]$ . Die eindimensionale Gleichung für stehende Wellen ist

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0, \quad \omega > 0.$$

Am offenen Ende bildet sich ein Schwingungsknoten, also  $y(l) = 0$ . Am geschlossenen Ende  $x = 0$  muss sich die Welle mit der Reflektierten Welle überlagern, was die Bedingung  $y'(0) = 0$  gibt. Wir haben daher

$$a = 0, \quad b = l, \quad \alpha = 0, \quad \tilde{\alpha} = 1, \quad \beta = 1, \quad \tilde{\beta} = 0,$$

und das Fundamentalsystem

$$f_1(x) = \sin(\omega x), \quad f_2(x) = \cos(\omega x).$$

Die Randbedingungen  $y'(0) = 0$ ,  $y(l) = 0$  ergeben für  $y = c_1 f_1 + c_2 f_2$  das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1'(0)c_1 + f_2'(0)c_2 &= 0 \\ f_1(l)c_1 + f_2(l)c_2 &= 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \sin(\omega l) & \cos(\omega l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist genau dann nicht invertierbar, wenn  $\omega l = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  mit einem  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ist. Nur dann gibt es Lösungen die nicht konstant 0 sind. Die hörbaren Frequenzen sind damit über die Schallgeschwindigkeit korreliert.

□

Im Falle inhomogener Randwertprobleme sind die Randbedingungen von der Form

$$\begin{aligned} \alpha y(a) + \tilde{\alpha} y'(a) &= \gamma_a, \\ \beta y(b) + \tilde{\beta} y'(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

mit gegebenen  $(\alpha, \tilde{\alpha}) \neq (0, 0)$ ,  $(\beta, \tilde{\beta}) \neq (0, 0)$  und  $\gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt wieder das Superpositionsprinzip: Jede Lösung ist Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Randwertaufgabe und einer allgemeinen Lösung der homogenen Randwertaufgabe. Demnach gibt es zwei Möglichkeiten:

- (1) Die homogene Randwertaufgabe hat nur die triviale Lösung, dann ist die inhomogene Randwertaufgabe eindeutig lösbar.
- (2) Die homogene Randwertaufgabe hat einen eindimensionalen Lösungsraum, dann bilden die Lösungen der homogenen Randwertaufgabe einen eindimensionalen affinen Vektorraum (falls es eine spezielle Lösung gibt) oder es gibt keine Lösung.

**Eigenwertprobleme** In der Physik kommt noch eine Variante der Randwertaufgabe häufiger vor, nämlich sogenannte Rand-Eigenwertaufgaben. Wie wir gesehen haben, ist die eindeutige Lösbarkeit des homogenen Randwertproblems durch die Nulllösung die Regel für die homogene Randwertaufgabe ist und nichttriviale Lösungen gibt es nur, wenn eine gewisse Matrix nicht invertierbar ist. Die formale Ähnlichkeit mit dem Eigenwertproblem der linearen Algebra motiviert die Begriffe in diesem Kapitel. Es gibt aber auch physikalische Motivation, zum

**Beispiel** Eine schwingende Saite wird modelliert durch die Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

wobei Ableitungen nach der Zeit  $t$  und nach dem Ort  $x$  vorkommen, und  $y \equiv y(t, x)$  die Auslenkung zur Zeit  $t$  am Ort  $x$  ist.  $a > 0$  ist eine materialabhängige Konstante. Die Randbedingungen sind  $y(t, 0) = y(t, l) = 0$  für alle  $t$ , wenn wir annehmen, dass die Saite der Länge  $l > 0$  an den Enden fest eingespannt ist und nur dazwischen schwingen kann. Da wir partielle Differentialgleichungen im Allgemeinen nicht lösen können, versuchen wir einen Ansatz, der alles auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführt. Oft nützlich ist ein Separationsansatz

$$y(t, x) = g(t)f(x).$$

Nach Einsetzen in die Differentialgleichung folgt:

$$\ddot{g}(t)f(x) = a^2 g(t)f''(x).$$

Für den Fall, dass  $g(t) \neq 0 \neq f(x)$  gilt, erhalten wir durch Division:

$$\frac{\ddot{g}(t)}{a^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Da die linke Seite nicht von  $x$  abhängt und die rechte Seite nicht von  $t$ , müssen beide konstant sein, wir nennen die Konstante  $-\lambda$  und erhalten die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} f''(x) + \lambda f(x) &= 0, \\ \ddot{g}(t) + \lambda a^2 g(t) &= 0, \end{aligned}$$

da durch den „Separationsansatz“  $\lambda \in \mathbb{R}$  gekoppelt sind. So wurden wir auf ganz natürliche Weise auf die Eigenwertaufgabe geführt, bei der gefragt wird, für welche Werte von  $\lambda$  das Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} f''(x) + \lambda f(x) &= 0 \\ f(0) = f(l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

eine nichttriviale Lösung hat. Dabei folgen die Randwerte für  $f$  direkt aus den Randwerten für  $y$ . Ein Fundamentalsystem zu (2.35) ist

$$\begin{aligned} \{\exp(-\sqrt{-\lambda}x), \exp(\sqrt{-\lambda}x)\} &, \quad \text{falls } \lambda < 0, \\ \{1, x\} &, \quad \text{falls } \lambda = 0, \\ \underbrace{\{\sin(\sqrt{\lambda}x), \cos(\sqrt{\lambda}x)\}}_{=:f_2(x)} &, \quad \text{falls } \lambda > 0. \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=:f_1(x)} \end{aligned}$$

Man sieht sofort ein, dass es nicht-triviale Lösungen des Randwertproblems nur im letzten Fall geben kann, und zwar dann, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist (siehe vorherigen Abschnitt). Dann muss  $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$  sein, also  $\lambda l = n\pi$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ). Wir halten also fest: Die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe  $f'' + \lambda f = 0$ ,  $f(0) = f(l) = 0$  sind genau die Zahlen

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Lösungen für diese Werte sind von der Form

$$f(x) = c \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = c f_n(x).$$

Die zeitabhängige Faktor des Randwertproblems hat zunächst keine einengenden Randbedingungen, also hat er im Fall  $\lambda = \lambda_n$  die allgemeine Lösung

$$g(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right).$$

Aus dem Separationsansatz haben wir also mit  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$  die Lösungen

$$y_n(t, x) = (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))f_n(x),$$

mit frei wählbaren  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ . Wir wollen nun noch die Anfangsbedingungen der Saite zur Zeit  $t = 0$  vorschreiben, also  $y(0, x) = y_0(x)$  mit einer gegebenen stetigen Funktion  $y_b : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y_0(0) = y_0(l) = 0$ . Da das bei einer Gleichung zweiter Ordnung noch nicht genügend Bedingungen sind, um eine eindeutige Lösung zu erhalten, geben wir noch die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{y}(0, x) = y_1(x)$  an jedem Punkt vor,  $y_1 : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $y_1'(0) = y_1'(l) = 0$ . Wegen  $y_n(0, x) = a_n f_n(x)$ ,  $\dot{y}_n(0, x) = b_n \omega_n f_n(x)$  können wir folgern, dass

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))f_n(x),$$

die Lösung unseres Anfangswertproblems ist, wenn wir nur die  $a_n, b_n$  so wählen können, dass

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x), \quad y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n f_n(x),$$

gilt. Dies funktioniert aber immer, da das nämlich gerade die Zerlegung von  $y_0, y_1$  in Fourier-Reihen ist. Somit hat das Eigenwertproblem geholfen, das Anfangswertproblem für eine partieller Differentialgleichung komplett zu lösen. Dieser Trick funktioniert hinreichend oft, so dass wir ihn in allgemeinen Situationen zur Verfügung haben wollen.

Wir betrachten allgemeiner das (homogene) Rand-Eigenwertproblem:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y + \lambda y = 0, \quad (y(a), y'(a)) \in V_a, \quad (y(b), y'(b)) \in V_b, \quad I = [a, b], \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

mit der Notation des vorherigen Abschnitts, und stellen uns die Frage: Für welche  $\lambda$  gibt es nichttriviale Lösungen?

Substitution wie folgt: Sei  $s(x)$  irgendeine Stammfunktion zu  $\frac{a_1}{a_2}$ . Multipliziere die Gleichung mit  $\exp(s(x))$  und setze  $p(x) = r(x) = \exp(s(x))$ ,  $q(x) = \exp(s(x))a_0(x)$ . Damit transformiert sich die Differentialgleichung zu

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0.$$

Wir nennen den Differentialoperator

$$Ly(x) := (p(x)y')' + q(x)y. \tag{2.36}$$

**Definition 2.5.3 (Sturm-Liouville-Eigenwertaufgabe)** Die Eigenwertaufgabe

$$\begin{cases} Ly + \lambda r(x)y = 0 \\ (y(a), y'(a)) \in V_a, \quad (y(b), y'(b)) \in V_b \end{cases}$$

auf  $[a, b]$  mit allen Berechnungen wie oben heißt Sturm-Liouville'sche Eigenwertaufgabe.  
Ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , für das eine nichttriviale Lösung existiert heißt ein Eigenwert.

□

Zur Lösung des Problems bemerken wir wieder die formale Ähnlichkeit zur Linearen Algebra! Wir definieren für stetige Funktionen  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  den Ausdruck

$$\langle \varphi, \psi \rangle_r := \int_a^b \varphi(x)\psi(x)r(x)dx.$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf dem Raum  $C^0([a, b])$  ein Skalarprodukt definiert, das heißt eine symmetrisch positiv definite Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^0([a, b]) \times C^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir stellen nun fest, dass der Operator  $\frac{1}{r}L$  formal selbstadjungiert ist, das heißt

$$\langle \frac{1}{r}L\varphi, \psi \rangle_r = \langle \varphi, \frac{1}{r}L\psi \rangle_r,$$

für alle  $\varphi, \psi$  die  $C^2$  sind und die Randbedingungen erfüllen. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{r}L\varphi, \psi \rangle_r &= \int_a^b \psi(x)L\varphi(x)dx = \int_a^b \psi(x)(p(x)\varphi'(x))'dx + \int_a^b q(x)\psi(x)\varphi(x)dx \\ &= [p(b)\psi(b)\varphi'(b) - p(a)\psi(a)\varphi'(a)] - \int_a^b \psi'p(x)\varphi'(x)dx + \int_a^b q(x)\psi(x)\varphi(x)dx \\ &= p(b)[\psi(b)\varphi'(b) - \psi'(b)\varphi(b)] - p(a)[\psi(a)\varphi'(a) - \varphi(a)\psi'(a)] + \\ &+ \int_a^b \varphi(x)(p(x)\psi'(x))'dx + \int_a^b q(x)\psi(x)\varphi(x)dx \\ &= p(x) \det \begin{pmatrix} \psi(x) & \varphi(x) \\ \psi'(x) & \varphi'(x) \end{pmatrix} \Big|_{x=a}^{x=b} + \langle \varphi, \frac{1}{r}L\psi \rangle_r \\ &= \langle \varphi, \frac{1}{r}L\psi \rangle_r \end{aligned}$$

Die Determinante ist Null, da  $\varphi$  und  $\psi$  wegen Randbedingungen in einem eindimensionalen Unterraum liegen, die Spalten also linear abhängig sind.

Auf einem geeigneten „unendlich dimensionalen Funktionenraum“ spielen die Operatoren  $\frac{1}{r}L$  offensichtlich dieselbe Rolle wie die selbstadjungierten Matrizen auf  $\mathbb{R}^N$ ! Das heißt das Sturm-Liouville'sche-Problem ist nichts anderes als die Eigenwertaufgabe für  $\frac{1}{r}L$  auf dem Funktionenraum.

**Satz 2.5.4 (Sturm-Liouville-Eigenwertaufgabe)** Für die Sturm-Liouville-Eigenwertaufgabe gilt:

- (1) Auch wenn komplexwertige Lösungen zugelassen sind, sind alle Eigenwerte reell.
- (2) Alle Eigenräume (das heißt die Lösungsmengen zu vorgegebenen Eigenwerten) sind eindimensional (siehe Satz im letzten Abschnitt).
- (3) Die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ .
- (4) Die Eigenwerte bilden eine unendliche Folge  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ .
- (5) Die Eigenfunktionen  $\varphi_n$  (das heißt Lösungen der Aufgabe  $\neq 0$ ) zum Eigenwert  $\lambda_n$  haben genau  $n$ -Nullstellen in  $]a, b[$ .
- (6) Ist  $f(x)$  stetig und stückweise differenzierbar auf  $[a, b]$ , und  $f(a) = f(b) = 0$ , so lässt sich  $f$  als Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$$

schreiben. Dies entspricht der weitgehenden Verallgemeinerung der Fourier-Reihenentwicklung aus dem Beispiel der schwingenden Saite. Dabei muss  $\varphi_k$  so normiert werden, dass

$$\langle \varphi_k, \varphi_{k'} \rangle = \delta_{k,k'}$$

gilt.

## 2.6 Spezielle Funktionen in der Physik

In diesem Kapitel wollen wir uns mit in der Physik häufig vorkommenden Funktionen beschäftigen.



**Ziel** Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0, \quad (2.37)$$

auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Man sieht sofort, dass es sich dabei um eine partielle Differentialgleichung handelt, denn der Laplace-Operator im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Gibt man auf einem Gebiet  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^3$  zum Beispiel ohne Randdaten vor, also  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so könnte man die Aufgaben stellen, diejenigen Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden, die die Randwertaufgabe  $\Delta u = 0$  auf  $\Omega$ ,  $u = \varphi$  auf  $\partial\Omega$  löst. Für allgemeine Gebiete  $\Omega$  wird man sich dabei schwer tun, nimmt man aber eine gewisse Symmetrie für  $\Omega$  an (zum Beispiel eine Kugel), so kann man das Randwertproblem explizit lösen.

Wir wollen in diesem Abschnitt die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten betrachten und lösen.

### Motivationen aus der Physik

- geerdete Kugel in homogenen elektrischen Feld,
- H-Atom.

Ausgangspunkt ist die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten, die man durch Transformation von kartesischen auf sphärische Koordinaten erhält:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad u \equiv u(r, \vartheta, \varphi). \quad (2.38)$$

Erneut machen wir einen Seperationsansatz:

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\vartheta) Q(\varphi).$$

Einsetzen in (2.38) und Differentiation liefert:

$$PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0,$$

und nach Multiplikation mit  $\frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{UPQ}$  mit  $U, P, Q$  ungleich Null:

$$r^2 \sin^2 \vartheta \left[ \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta P} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0.$$

Wie im Beispiel mit der Differentialgleichung für die schwingende Saite stellen wir fest, dass der erste Term nicht von  $\varphi$  abhängt, der zweite Term nicht von  $r$  und  $\vartheta$ , daher müssen beide konstant sein, wir nennen die Konstante  $-m^2$  und erhalten die beiden über den Parameter  $m$  „gekoppelten“ Daten.

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (2.39)$$

$$r^2 \sin^2 \vartheta \left[ \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta P} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) \right] = m^2.$$

Die erste Differentialgleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion  $Q \equiv Q(\varphi)$ . Die zweite Gleichung formen wir durch Multiplikation mit  $\frac{1}{\sin^2 \vartheta}$  um zu:

$$r^2 \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{\sin \vartheta P} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = 0.$$

Hier hängt der erste Summand nur von  $r$  ab, der zweite nur von  $\vartheta$ , also müssen wieder beide konstant sein. Wir berechnen die Konstante mit  $l(l+1)$  und erhalten zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + [l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta}] P = 0. \quad (2.41)$$

Ohne Beweis stellen wir an dieser Stelle fest, dass die physikalisch sinnvollen Lösungen nur in den Fällen, dass  $l$  ganzzahlig und  $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$  ist, auftreten und wollen uns deshalb auf diese beschränken. Die Fundamentalsysteme der beiden Gleichungen (2.39) und (2.40) lauten:

- Für  $Q \equiv Q(\varphi)$ :

$$\{\exp(im\varphi), \exp(-im\varphi)\}.$$

- Für  $U \equiv U(r)$ :

$$\{r^l, r^{-l-1}\}.$$

Es bleibt, die Differentialgleichung (2.41) zu lösen. Substitution  $x = \cos \vartheta$ ,  $\frac{d}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{d}{dx}$  liefert die Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] P = 0, \quad (2.42)$$

bzw. äquivalent

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]P = 0. \quad (2.43)$$

Nennen wir die Lösungen von (2.43) in Abhängigkeit der Parameter  $l$  und  $m$   $P_{l,m}(x)$ , so können wir die Lösung der Laplace-Gleichung schreiben als Linearkombination aller Fundamentallösungen, also

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{l,m}r^l + B_{l,m}r^{-l-1}] \exp(im\varphi) P_{l,m}(\cos \vartheta),$$

mit Koeffizienten  $A_{l,m}, B_{l,m}$  die durch Randbedingungen bestimmt werden. Im Fall  $m = 0$  sieht das ganze noch etwas einfacher aus (Azimutale Symmetrie)

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] P_l(\cos \vartheta),$$

mit  $P_l \equiv P_{l,0}$  Lösungen der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + l(l+1)P = 0. \quad (2.44)$$

Im allgemeinen Fall  $m \neq 0$  wird die Gleichung gelöst durch die sogenannten Legendre-Funktionen  $P_{l,m}(x)$ , die gegeben sind durch (Nachprüfen durch Einsetzen!)

$$P_{l,m}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l.$$

$P_{l,m}$  ist also das Produkt von  $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$  mit einem Polynom vom Grad  $(l-m)$  und der Parität  $(-1)^{l+m}$ , das im Intervall  $[-1, 1]$  genau  $(l-m)$  einfache Nullstellen aufweist. Betrachten den Raum  $C^0([-1, 1])$  aller stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  mit Randwerten Null, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

so stellen wir fest, dass die Legendre-Funktionen orthogonal sind, also

$$\langle P_{l,m}, P_{l',m} \rangle = \int_{-1}^1 P_{l,m}(x)P_{l',m}(x)dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}.$$

Wir interessieren uns speziell für den Fall  $m = 0$ . In diesem Fall gilt offenbar

$$P_l(x) = P_{l,0}(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l.$$

$P_l$  sind Polynome vom Grad  $l$ , der Parität  $(-1)^l$ , die im Intervall  $[-1, 1]$  genau  $l$  einfache Nullstellen besitzen. Sie heißen Legendre-Polynome.

Explizite Formel für die Legendre-Polynome:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^l}(x^2 - 1)^l &= \frac{d}{dx^l} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^k x^{2(l-k)} \\ &= \sum_{k=0}^l l! (-1)^k \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} x^{2l-2k-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} l! (-1)^k \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} x^{l-2k} \end{aligned}$$

Daher:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^k \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} x^{l-2k} = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k} \quad (2.45)$$

**Satz 2.6.1 (Erzeugende Funktion der Legendre-Polynome)** Für  $|x| \leq 1$ ,  $|t| \leq 1$  gilt:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l.$$

**Beweis** Beachte, dass gilt:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = [1 - t(2x - t)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} t^j (2x - t)^j,$$

mit

$$\binom{-\frac{1}{2}}{j} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2j-1}{2})}{j!} = (-1)^j \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2j-1)}{2^j j!} = (-1)^j \frac{(2j-1)!!}{2^j j!},$$

wobei  $(2j-1)!! = \frac{(2j)!}{2^j j!}$ . Damit gilt nun:

$$\begin{aligned}
 (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{2^j j!} t^j (2x-t)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{2^j j!} t^j \sum_{k=0}^j t^k (2x)^{j-k} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} 2^j 2^{-k} \frac{(2j-1)!!}{2^j j!} x^{j-k} t^{j+k} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{j+k=l} (-1)^k \binom{j}{k} \frac{(2j-1)!!}{2^k j!} x^{j-k} \right) t^l \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^l (-1)^k \frac{(2l-2k-1)!}{2^k (l-k)!} \binom{l-k}{k} x^{l-2k} \right) t^l \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l (l-k)! k! (l-2k)!} x^{l-2k}}_{P_l(x)} \right) t^l.
 \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.6.2 (Entwicklung des Newton-Kerns)** Für  $x, x' \in \mathbb{R}^3$  mit  $x \neq x'$  gilt

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos \alpha),$$

sofern  $\frac{r'}{r} = \frac{|x'|}{|x|} < 1$  und  $\cos \alpha = \frac{x \cdot x'}{|x| |x'|}$ .

**Beweis** Schreibe

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{\sqrt{|x|^2 - 2xx' + |x'|^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \alpha + r'^2}} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\frac{r'}{r} \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}.$$

Nun verwende vorherigen Satz mit  $t \equiv \frac{r'}{r}$  und  $x = \cos \alpha$ .

□

**Definition 2.6.3 (Kugelflächenfunktion)** Die bis auf einen Normierungsfaktor in der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten auftretenden Funktionen

$$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_{l,m}(\cos \vartheta) \exp(im\varphi), \quad (2.46)$$

heißen Kugelflächenfunktionen.

□

**Bemerkung** Im Fall  $m = 0$  reduzieren sich die Kugelflächenfunktionen zu

$$Y_{l,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta).$$

**Satz 2.6.4 (Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen)** (1) Für die Legendre-Funktionen  $P_{l,m}$  gilt:

$$P_{l,-m}(x) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}(x),$$

und somit für die Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}(\vartheta, \varphi),$$

mit  $*$  - dem komplex konjugierten.

(2) (Orthogonalität) Versehen wir alle stetigen Funktionen  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^2} f \cdot g^* d\Omega,$$

so gilt:

$$\langle Y_{l,m'}, Y_{l,m} \rangle = \delta_{l,l'} \cdot \delta_{m,m'}.$$

(3) (Vollständigkeit) Jede stetige Funktion  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  lässt sich nach Kugelflächenfunktionen entwickeln, das heißt es existieren Koeffizienten  $c_{l,m}$ , so dass

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m} Y_{l,m}(x),$$

wobei die Koeffizienten  $c_{l,m}$  gegeben sind, durch

$$c_{l,m} = \langle f, Y_{l,m} \rangle = \int_{S^2} f \cdot Y_{l,m}^* d\Omega,$$

darstellen lässt.

□

**Bemerkungen**

- Durch Einführung von Koordinaten  $(\vartheta, \varphi)$  auf der  $S^2$  kann man das Skalarprodukt zurückziehen auf  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$  und erhalten

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) g^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Die Koeffizienten  $c_{l,m}$  berechnen sich dann zu

$$c_{l,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi) f(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

- (Additionstheorem)

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi),$$

mit Winkel  $\alpha$  zwischen den Richtungen  $(\vartheta, \varphi)$  und  $(\vartheta', \varphi')$ .

**Anwendung** Sphärische Multipolentwicklung

Betrachten das Potential einer Ladungsverteilung  $\varrho$  mit  $\varrho \equiv 0$  außerhalb einer Kugel mit Radius  $0 < R < \infty$ :

$$\phi(x) = \int_V \frac{\varrho(x')}{|x - x'|} dx'.$$

Wir schreiben  $r = |x|$ ,  $r' = |x'|$  in Polarkoordinaten.  $\alpha$  bezeichnet den Winkel zwischen den Richtungen  $(\vartheta, \varphi)$ ,  $(\vartheta', \varphi')$ . Die Entwicklung des Newton-Kerns liefert:

$$\phi(x) = \int_V \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \frac{r'^l}{r^{l+1}} \varrho(x') dx'.$$

Wenden das Additionstheorem an:

$$\phi(x) = \int_V \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \varrho(x') Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) dx'.$$

Bezeichnen mit

$$q_{l,m} = \int_V \varrho(x') r'^l Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') dx'$$

das sphärische Multipolmoment. Somit gilt:

$$\phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{l,m}}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

□